

Appunti di Cosmologia

Tommaso Ronconi

A.A. 2014 - 2015

Indice

I	Modelli Cosmologici	7
1	Principi Primi dei Modelli Cosmologici	9
1.1	Principi della Cosmologia	10
1.2	La Legge di Hubble	13
1.3	Redshift	15
1.4	Il Parametro di Decelerazione	18
1.5	Distanze Cosmologiche	19
1.5.1	I test $m - z$ ed $N - z$	20
1.6	Il Paradosso di Olbers	23
1.7	Le Equazioni di Friedmann	24
1.8	Un Approccio Newtoniano	25
1.9	La Costante Cosmologica	28
2	I Modelli di Friedmann	33
2.1	Modelli con Fluido Perfetto	36
2.1.1	Inevitabilità del Big-Bang in un Universo di Friedmann	39
2.2	Universo Piatto	41
2.3	Universi Curvi: Proprietà Generali	43
2.3.1	Universi Aperti	44
2.3.2	Universi Chiusi	45
2.4	Universi di Polvere	45
2.4.1	Universi Chiusi	47
2.4.2	Universi Aperti	48
2.4.3	Caso generale e commenti	49
2.5	Evoluzione del Parametro di Densità	51
2.6	Orizzonte Cosmologico	53
2.7	Modelli con Costante Cosmologica	55
3	Storia Termica del Modello del Big-Bang Caldo	59
3.1	Disaccoppiamento e Ricombinazione	62
3.2	Entropia della Radiazione per Barione	67
3.3	Tempi Scala nel Modello Standard	68
4	L'Universo Primordiale	71
4.1	Il Problema dell'Origine	71
4.2	Il Tempo di Planck	72
4.3	L'Era di Planck	74

5	Transizioni di Fase ed Inflazione	77
5.1	Il Big-Bang Caldo	77
5.2	Transizioni di Fase	79
5.2.1	Fisica delle Transizioni di Fase	80
5.3	Transizioni di Fase Cosmologiche	84
5.4	Problemi del Modello del Big-Bang Caldo	85
5.4.1	Problema dei Monopoli Magnetici	85
5.4.2	Problema della Costante Cosmologica	87
5.4.3	Problema dell'Orizzonte Cosmologico	88
5.4.4	Problema della Piattezza dell'Universo o Problema dell'Età	95
6	I Modelli dell'Inflazione	99
6.1	Modello di Guth	99
6.2	Inflazione Caotica di Linde	104
6.2.1	Fase (a): Caduta Verso l'Attrattore	106
6.2.2	Fase (b): Inflazione	108
6.2.3	Fase (c): Uscita Graziosa dall'Inflazione	111
6.3	Modello Generalizzato	114
6.4	Re-Heating	116
6.5	Riassunto sul Paradigma dell'Inflazione	118
7	Evoluzione dell'Universo Post-Inflazione	121
7.1	Era Adronica (cenni)	121
7.2	Era Leptonica	122
7.2.1	Il Background Cosmico di Neutrini	125
7.3	Nucleosintesi Primordiale	128
7.3.1	Il Rapporto Neutroni-Protoni	129
7.3.2	Nucleosintesi dell'Elio	130
7.3.3	Commento sulle Abbondanze degli Elementi Primordiali	132
7.4	Verso la Ricombinazione	134
7.4.1	Ricombinazione dell'Idrogeno	136
7.5	Era della Materia	138
7.5.1	La CMB (cenni)	141
II	Teoria di Formazione delle Strutture	143
8	Teoria di Jeans in Universi in Espansione	145
8.1	Scala di Jeans	146
8.1.1	Universi Statici	148
8.2	Teoria di Jeans in Cosmologia	153
8.2.1	Soluzione per $\lambda > \lambda_H$	154
8.2.2	Soluzione per $\lambda < \lambda_H$	156
8.3	Teoria di Jeans in Universi EdS	161
8.4	Teoria di Jeans in Universi Curvi di Materia	164
8.5	Teoria di Jeans in Universi di Radiazione	169
8.6	Fluttuazioni di Materia Oscura	171
8.7	Fluttuazioni Barioniche	176
8.8	Riassunto delle Soluzioni	177

9	Massa di Jeans e di Dissipazione	181
9.1	Tipologie di Materia Oscura	181
9.2	Massa di Jeans di HDM e di CDM	182
9.3	Massa di Jeans dei Barioni	186
9.4	Dissipazione delle Perturbazioni	189
9.4.1	Materia Oscura e Free Streaming	189
9.4.2	Materia Barionica e Dissipazione	191
10	Teoria delle Perturbazioni	195
10.1	Funzione di Correlazione	197
10.1.1	Teorema di Parseval	199
10.1.2	Varianza del Campo Puntuale	199
10.1.3	Convoluzione	200
10.1.4	Varianza di Massa	201
10.2	Spettro di Potenza e Relazioni di Scala	202
10.3	Perturbazioni e Orizzonte Cosmologico	205
10.3.1	Nota sullo Spettro di Zel'dovich	209
10.4	Evoluzione dello Spettro di Potenza	210
10.4.1	Effetto della Stagnazione	210
10.4.2	Effetto del Free Streaming	216
10.4.3	Funzione di Trasferimento	216
10.4.4	Evoluzione Dopo l'Equivalenza	217
10.5	Considerazioni sulla Distribuzione delle Perturbazioni	219
11	Evoluzione Non Lineare	221
11.1	Collasso Sferico	221
11.1.1	Fase di Collasso e Virializzazione	226
11.2	Funzione di Press-Schechter	229
11.3	Simulazioni Numeriche	237
11.4	Simulazioni N-Body	240
11.4.1	Metodo Particle-Particle (PP)	241
11.4.2	Metodi su griglia (PM, P3M)	242
11.4.3	Metodi ad Albero Gerarchico (HT)	245
11.4.4	Confronti e Commenti	247
11.5	Gastrofisica e Codici Idrodinamici	254
11.5.1	Metodi Euleriani	254
11.5.2	Metodi Lagrangiani	255
11.5.3	Confronto Tra Metodi Idrodinamici	257
11.6	Relazioni di Scala e Auto-Similarità	261
12	Proprietà di Clustering	267
12.1	Funzione di Correlazione a 2 Punti	267
12.2	Funzione di Correlazione a N Punti	273
12.3	Funzione di Correlazione Angolare	274
12.4	Bias Osservativo	276
12.5	Variazione del Clustering con il Redshift	278
12.6	Effetti Dovuti Moto Proprio degli Oggetti	282

13 Cosmic Microwave Background	289
13.1 Anisotropie nello Spettro della CMB	289
13.2 Multipoli dello Spettro di Potenza Angolare	292
13.2.1 Multipoli di Ordine Superiore al Secondo	293
13.3 Anisotropie Secondarie	301
13.3.1 Effetto Sachs-Wolfe Integrato	301
13.3.2 Effetto del Lensing Gravitazionale	303
13.3.3 Re-ionizzazione dell'Universo	303
13.3.4 Effetto Sunyaev-Zel'dovich	304
13.4 Osservazione nella Pratica	304

Parte I

Modelli Cosmologici

Capitolo 1

Principi Primi dei Modelli Cosmologici

La Cosmologia è una parte dell'Astrofisica che si occupa di studiare la formazione e l'evoluzione dell'universo nella sua interezza. Nel passato per la sua particolare connotazione ha strizzato l'occhio a materie poco scientifiche, quali Teologia e Filosofia. Non è intenzione di questo corso coprire questo aspetto.

Dopo Einstein la cosmologia passa da problema puramente matematico a problema astrofisico, diventa importante la Cosmologia Osservativa. Prima della scoperta della radiazione cosmica di fondo (CMB), il modello di Universo in espansione era molto osteggiato, neanche Einstein in effetti sosteneva questa ipotesi, propendendo più per un Universo statico.

Oggi la Cosmologia è in forte imbarazzo perché degli ottimi dati spingono verso un modello difficile da accettare che prevede:

- 4 % di Materia Barionica;
- 26 % di Materia Oscura (DM)¹;
- 70 % di Energia Oscura²;
- 10^{-5} % di Radiazione.

Finché parliamo di DM i problemi sorgono ma sono trattabili, ci può stare insomma. Il vero problema sorge con la componente dominante sulla quale si è capito veramente poco. Si deve comportare come una sorta di antigravità, una pressione negativa, l'energia del vuoto. Ne conosciamo esclusivamente gli effetti dinamici e qualche effetto nella formazione anomala delle strutture.

Come se non bastasse inoltre anche il modello del Big Bang presenta tre grandi problemi attualmente irrisolvibili:

- Orizzonte Cosmologico;
- Monopoli Magnetici;
- Densità Critica.

¹Miglior candidato attuale, in seno al Modello Standard (SM), il Neutrino, che non sembra però avere massa sufficientemente alta. Il problema è più complesso...

²Deus Ex Machina

Una “stampella” che verrà in aiuto al Modello del Big-Bang è il Modello dell’Inflazione che prevede un’espansione parossistica dell’universo nei suoi primi istanti di vita.

La storia dell’Universo è una Storia di Raffreddamento, dal Big-Bang passando per l’inflazione e arrivando, grazie al raffreddamento, al collasso gravitazionale della materia, barionica e non, e alla conseguente formazione delle prime strutture.

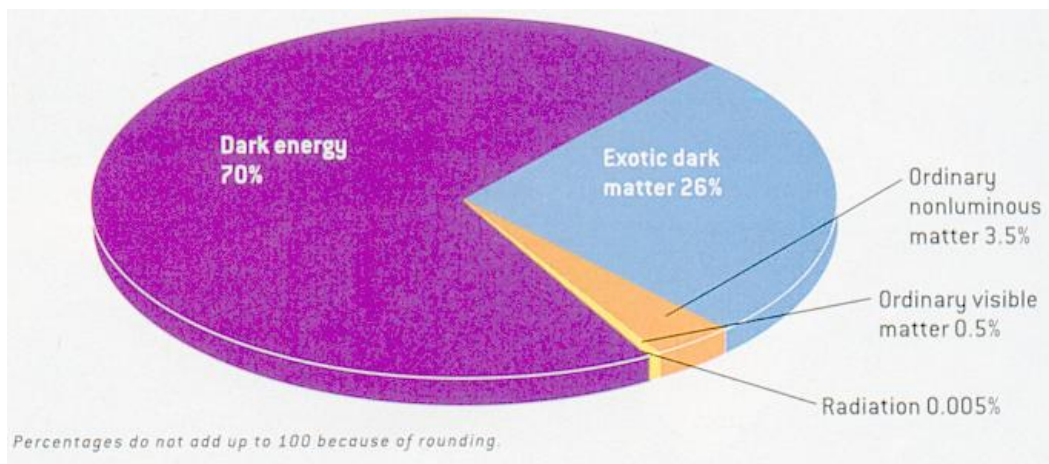


Figura 1.1: Abbondanze percentuali delle diverse componenti dell’Universo a $z = 0$ secondo il modello attualmente accettato.

1.1 Principi della Cosmologia

Per poter comprendere teoricamente il perché di determinati osservabili, nella fisica è spesso utile introdurre dei principi. Tali principi sono spesso basati su idee di simmetria in modo da diminuire il numero di gradi di libertà da considerare. Non fa eccezione la cosmologia il cui principio primo, su cui si basa tutta la modellistica, è il

Principio Cosmologico: Nell’Universo non esistono né posizioni né direzioni privilegiate. L’Universo, su scale sufficientemente grandi³, è quindi da considerarsi *omogeneo* ed *isotropo*.

Questo principio venne introdotto da Einstein per dare un fondamento teorico relativistico alla cosmologia. Esistono anche prove osservative a sostegno del principio cosmologico tra le quali la distribuzione su grande scala delle galassie (e degli ammassi di galassie) e soprattutto l’isotropia della radiazione cosmica di fondo (CMB). È da notare che isotropia non è sinonimo di omogeneità, infatti una posizione privilegiata nell’Universo potrebbe far sì che la CMB a noi appaia omogenea (vedi **Principio Copernicano**).

Esiste anche un **Principio Cosmologico Perfetto** che aggiunge alle richieste di isotropia ed omogeneità anche l’*immutabilità nel tempo*. Su questo principio si basa il modello cosmologico dello Stato Stazionario (proposto da Bondi, Hoyle e Gold nel 1948). Questo modello è stato il principale concorrente di quello del Big-Bang (tra l’altro così battezzato con tono di scherno da Hoyle stesso) finché non venne completamente abbandonato dalla comunità scientifica dopo la scoperta della CMB. Altro punto debole dello Stato Stazionario è la difficoltà che ha nel spiegare l’abbondanza di elio nell’Universo.

³scale maggiori di quelle tracciate dalla distribuzione su grande scala delle galassie, per intenderci $\lambda \gg$ dimensioni dei più grandi ammassi di galassie ($\approx 10Mpc$).

Tornando a noi... La formazione delle strutture cosmiche da una distribuzione primordiale omogenea si giustifica con una teoria basata sull'evoluzione di piccole perturbazioni dovute a fluttuazioni di gravità quantistica. La forza predominante in natura su grande scala è la gravità, saranno quindi estremamente importanti oltre al Principio Cosmologico anche i principi della Relatività Generale.

Il primo passo verso lo sviluppo di un modello cosmologico consiste nel fissare una **metrica** per il nostro universo, con la quale misurare le distanze tra due diversi punti nello spazio-tempo (**eventi**): (x_1, y_1, z_1, t_1) e (x_2, y_2, z_2, t_2) .

Nei modelli del Big-Bang si tenta di applicare una metrica il più possibile semplice che rappresenti il Principio Cosmologico⁴, la distanza tra due eventi è data dalla quantità

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx_\alpha dx_\beta = g_{00} dt^2 + 2g_{0i} dx^i dt + g_{ij} dx^i dx^j$$

dove, nell'ultimo membro, il primo termine rappresenta la parte temporale, il secondo è il termine misto e il terzo da la parte spaziale. La metrica è definita dalle componenti $g_{\alpha\beta}$ del corrispondente **Tensore Metrica** che descrive la geometria dello spazio-tempo. In Relatività l'intervallo tra due eventi ds è invariante per cambiamento di coordinate e i fotoni si muovono su geodetiche tali per cui $ds = 0$ Se:

- $ds^2 > 0 \Rightarrow$ Intervallo di **tipo tempo**;
- $ds^2 < 0 \Rightarrow$ Intervallo di **tipo spazio**;
- $ds^2 = 0 \Rightarrow$ Intervallo di **tipo luce**.

Se la distribuzione di materia è uniforme allora lo spazio sarà UNIFORME ed ISOTROPO (come afferma il Principio Cosmologico). Questo d'altra parte significa che è possibile definire un **tempo universale** (o **tempo proprio**) tale per cui ad ogni istante la metrica spaziale 3D

$$dl^2 = g_{ij} dx^i dx^j$$

(con $i, j = 1, 2, 3$ e dove l'intervallo è ora esclusivamente la distanza spaziale) sia identica in ogni luogo ed ad ogni tempo. Non devono quindi esistere nè direzioni nè posizioni privilegiate e quindi i termini misti tempo-spaziali dovranno essere nulli, che significa dovranno essere nulle le componenti g_{0i} della metrica. La forma generale della metrica sarà di conseguenza

$$ds^2 = c^2 dt^2 - g_{ij} dx^i dx^j = (c dt)^2 - dl^2$$

Vogliamo quindi una scrittura generale del termine puramente spaziale dl^2 . Consideriamo il caso semplificato di un Universo Omogeneo ed Isotropo bidimensionale, potrà avere le 3 forme:

⁴La notazione usata è quella del Coles Lucchin:

$$\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$$

dove 0 indica la coordinata spaziale, per le componenti esclusivamente spaziali si useranno gli indici

$$i, j = 1, 2, 3$$

. Si utilizzerà inoltre la Convenzione di Einstein sugli indici ripetuti.

1. **Cartesiana piatta (spazio piano Euclideo con raggio di curvatura infinito):**

in coordinate polari $0 \leq \rho < \infty$ e $0 \leq \phi < 2\pi$ la metrica spaziale è

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2$$

Si introducono $r = \frac{\rho}{a}$ con raggio adimensionale ($0 \leq r < \infty$) e $a =$ parametro di dimensionalità $[L]$ arbitraria, da cui

$$dl^2 = a^2(dr^2 + r^2 d\phi^2)$$

2. **Superficie sferica di raggio R (con curvatura Gaussiana positiva $1/R^2$):**

in coordinate sferiche (raggio della sfera = R) $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $0 \leq \phi \leq 2\pi$

$$dl^2 = R^2(\sin^2 \theta d\phi^2 + d\theta^2)$$

Ora, $R := a$ e definisco $r := \sin \theta$ da cui $dr = \cos \theta d\theta$ e quindi

$$d\theta^2 = \frac{dr^2}{\cos^2 \theta} = \frac{dr^2}{1 - \sin^2 \theta} = \frac{dr^2}{1 - r^2}$$

posso quindi riscrivere la parte spaziale della metrica come

$$dl^2 = a^2 \left(\frac{dr^2}{1 - r^2} + r^2 d\phi^2 \right)$$

3. **Superficie Iperbolica (curvatura Gaussiana negativa):**

considero le funzioni trigonometriche iperboliche $r = \sinh \theta$ con $0 \leq \rho < \infty$, ho

$$dl^2 = R^2(\sinh^2 \theta d\phi^2 + d\theta^2)$$

anche qui pongo $R := a$ e riscrivo

$$dl^2 = a^2 \left(\frac{dr^2}{1 + r^2} + r^2 d\phi^2 \right)$$

Quindi i tre tipi di geometrie individuate hanno parte puramente spaziale con forma molto simile. Si può riscrivere in forma generale come

$$dl^2 = a^2 \left(\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\phi^2 \right)$$

dove K è detto **Parametro di Curvatura**:

- $K = 0$ Metrica Piatta;
- $K = 1$ Metrica Sferica;
- $K = -1$ Metrica Iperbolica.

Per analogia, in 3 dimensioni $d\phi^2$ diventa $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$ e tutto il resto rimane uguale. Viene così definita una metrica che incarna il Principio Cosmologico, la **Metrica di Friedmann-Robinson-Walker (FRW)**:

$$ds^2 = (c dt)^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2(\sin^2 \theta d\phi^2 + d\theta^2) \right] \quad (1.1)$$

dove $a = a(t)$, può dipendere dal tempo e ha in generale $[a(t)] = cm^2$, è detto **Fattore di Scala o di Espansione**. Di che tipo sia il nostro universo dipenderà dalle sue caratteristiche geometriche:

- $K = 0$ Geometria Cartesiana (euclidea) $\Rightarrow$ Universo Piatto;
- $K = 1$ Geometria Ipersferica (pseudo-euclidea) $\Rightarrow$ Universo Chiuso;
- $K = -1$ Geometria Iperboloidea (pseudo-euclidea) $\Rightarrow$ Universo Aperto.

È quindi necessario trovare un modo per capire in che tipo di Universo viviamo. Il primo metodo per arrivare a questo è utilizzare la misura delle distanze tra gli stessi due punti, poichè essa cambia al variare della geometria dell'Universo.

1.2 La Legge di Hubble

La distanza di un punto P dall'origine di un sistema di riferimento P_0 , in coordinate polari a tempo fisso $dt = 0$ e posti $d\theta = d\phi = 0$ (semplificazione che non fa perdere generalità al problema), è detta **distanza propria** e si ottiene integrando la metrica FRW tra $P_0 = (0, 0, 0)$ e $P = (r, 0, 0)$

$$d_{pr} = \int_0^r \frac{a(t) dr'}{\sqrt{1 - Kr'^2}}$$

Poichè poi $a = a(t) \propto r$ possiamo scrivere

$$d_{pr} = a(t)F(r) \quad (1.2)$$

con $F(r)$ una funzione del raggio che descrive la parte spaziale della metrica FRW ed assume valori diversi a seconda del valore di K :

- $K = 0 \Rightarrow F(r) = r$
- $K = +1 \Rightarrow F(r) = \int_0^r \frac{dr'}{\sqrt{1 - r'^2}} = \sin^{-1}(r)$
- $K = -1 \Rightarrow F(r) = \int_0^r \frac{dr'}{\sqrt{1 + r'^2}} = \sinh^{-1}(r)$

Ma come si può vedere d_{pr} è una quantità dipendente anche dal tempo (tramite il fattore di scala $a(t)$). Viene definita **distanza comovente** la d_{pr} calcolata a t_0 ⁵

$$d_C := d_{pr}(t_0) = a(t_0)F(r) = a_0F(r)$$

⁵In cosmologia i tempi vengono misurati dall'*oggi* che equivale a t_0 ("origine dell'asse dei tempi") all'indietro andando verso il Big-Bang. Tutte le volte che indicheremo il valore attuale di una quantità questa avrà il pedice 0 (es: $a(t_0) = a_0$).

La relazione tra distanza propria e distanza comovente è quindi data dalla

$$d_{pr} = d_C \frac{a(t)}{a_0}$$

Ma poichè d_{pr} dipende dal parametro di espansione $a(t)$, potrà cambiare nel tempo. Posso derivare la (1.2) rispetto al tempo per trovare la velocità radiale del punto P rispetto all'origine P_0 :

$$v_R = \frac{dd_{pr}}{dt} = \frac{d}{dt}[a(t)F(r)] = \frac{da(t)}{dt}F(r) + a(t)\frac{dF(r)}{dt} = \dot{a}(t)F(r) + a(t)\dot{F}(r)$$

Ma poichè $\dot{F} = 0$ (dato che $F(r) \propto t$) e poichè $F(r) = d_{pr}/a(t)$ allora

$$v_R = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}d_{pr} = H(t)d_{pr} \quad (1.3)$$

quest'ultima equazione è la famosa **Legge di Hubble** dove si è definita la **Costante di Hubble**:

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \quad (1.4)$$

anche se sarebbe più corretto chiamarlo **Parametro di Hubble** essendo esso dipendente dal tempo (inteso come "età dell'Universo"). Il motivo per il quale viene presentata come costante è che ad uno stesso istante t in tutto l'Universo assume lo stesso valore e dunque questo si espande uniformemente alla stessa velocità⁶. Il valore attualmente accettato per la costante di Hubble è

$$H_0 \approx 70 \text{ km}/(s \text{ Mpc})$$

primo **parametro cosmologico fondamentale** che incontriamo. Ci fornisce la velocità di espansione isotropa a $z = 0$. È da notare che il valore fornito da Hubble all'epoca del suo annuncio era più di 7 volte maggiore di quello attualmente accettato ($500\text{km}/(s \text{ Mpc})!!$). Questo era dovuto ad una sottostima degli errori di misura ed ad una selezione non corretta delle galassie sulle quali misurare il redshift (si trattava di tutte galassie troppo vicine). Rieffettuando i calcoli oggi con i dati precisi non si otterrebbero risultati statisticamente significativi⁷.

Si notino le unità di misura della costante, in particolare s^{-1} , l'inverso di H_0 ci fornisce una stima dell'età dell'Universo.

L'esistenza della legge di Hubble è conseguenza naturale dal Principio Cosmologico nel caso in cui $v_R \ll c$, ovvero se la velocità di espansione non è relativistica. Si considerino tre punti spaziali (3D), O, O' e P. O ed O' sono le origini di due diversi sistemi di riferimento che distano $\mathbf{d}$, P si muove rispetto ad (si allontana da) O a velocità $\mathbf{v}(\mathbf{r})$, mentre O' si muove rispetto ad O a velocità $\mathbf{v}(\mathbf{d})$. Avrò

$$\mathbf{v}'(\mathbf{r}') = \mathbf{v}(\mathbf{r}) - \mathbf{v}(\mathbf{d})$$

⁶“Mi da pressappoco come varia il parametro $a(t)$, cioè un valore assimilabile al raggio dell'Universo, con il trascorrere del tempo” Mosca

⁷GOMBLODDO!!!11(??) No pare solamente che il buon Hubble avesse fottuto i risultati di un altro tizio incontrato ad una conferenza, per approfondire chiedere...BUZZONI!!

Se vale il Principio Cosmologico ed il punto P è equidistante da O ed O' allora devono essere

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{v}'(\mathbf{r}')$$

da cui quindi

$$\mathbf{v}(\mathbf{r} - \mathbf{d}) = \mathbf{v}(\mathbf{r}) - \mathbf{v}(\mathbf{d})$$

Il che ci dice che tra velocità $\mathbf{v}$ e distanza $\mathbf{r}$ deve esistere una relazione lineare. Ho una dipendenza per ogni componente spaziale (x^1, x^2, x^3) e dunque tale relazione è rappresentata dalla matrice H_α^β , e posso quindi scrivere il sistema lineare algebrico

$$v_\alpha = H_\alpha^\beta x_\beta \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3)$$

La richiesta di isotropia dello spazio mi dice poi che il campo di velocità deve essere irrotazionale, cioè $\nabla \times \mathbf{v}$. Ma questo significa che la matrice H_α^β è simmetrica e può quindi sempre essere diagonalizzata, ovvero è sempre possibile effettuare una trasformazione (una rotazione in questo caso) che faccia sì che solo i termini della diagonale non siano nulli. Posso quindi scrivere

$$v_\alpha = H_\alpha^\alpha x_\alpha = H x_\alpha$$

dove l'ultimo passaggio è dovuto al fatto che, come si è già detto, non esistono direzioni privilegiate e quindi le varie componenti H_α^α saranno tutte uguali ad uno stesso valore H dipendente esclusivamente dal tempo. Abbiamo ritrovato la legge di Hubble da semplici considerazioni sull'isotropia dell'Universo.

Sempre poichè non devono esistere posizioni privilegiate la legge di Hubble deve valere identica anche per l'osservatore O'. Per l'osservatore O la velocità del punto P è data dalla legge di Hubble ma anche dalla composizione di velocità come sotto

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = H \mathbf{r} = \mathbf{v}(\mathbf{d}) + \mathbf{v}'(\mathbf{r}')$$

ovvero composizione della velocità del punto O' rispetto ad O e del punto P rispetto ad O'. E perciò, poichè $\mathbf{v}(\mathbf{d}) = H \mathbf{d}$, ho

$$\mathbf{v}'(\mathbf{r}') = \mathbf{v}(\mathbf{r}) - \mathbf{v}(\mathbf{d}) = H \mathbf{r} - H \mathbf{d} = H (\mathbf{r} - \mathbf{d}) = H \mathbf{r}'$$

dove nel terzo passaggio, grazie alla linearità della relazione è stato possibile raccogliere il parametro di Hubble. Si è così dimostrato che la legge di Hubble è la stessa per ogni punto dell'Universo in accordo con il Principio Cosmologico.

1.3 Redshift

Si definisce il parametro z , **redshift**, la quantità

$$z := \frac{\lambda_{obs} - \lambda_{em}}{\lambda_{em}} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda}$$

che misura lo spostamento dello spettro emesso, alla lunghezza d'onda λ_{em} e al tempo t_{em} , da una sorgente che si muove a velocità v_R dall'osservatore che osserva la radiazione ad

una λ_{obs} al tempo $t_{obs} = t_0$. Abbiamo che $z > 0$ se l'oggetto si allontana dall'osservatore (spostamento verso il rosso), nel caso opposto si parla di **blueshift**.

Consideriamo la metrica FRW in coordinate polari (1.1) semplificata per $d\phi = d\theta = 0$ (non fa perdere generalità) ovvero

$$ds^2 = (c dt)^2 - a^2(t) \frac{dr^2}{1 - Kr^2} \quad (1.5)$$

e prendiamo un fotone, per il quale $ds^2 = 0$ per definizione, posso quindi scrivere

$$\frac{(c dt)^2}{a^2(t)} = \frac{dr^2}{1 - Kr^2}$$

di questa ne integro la radice

$$\int_{t_{em}}^{t_0} \frac{c dt}{a(t)} = \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}} =: F(r)$$

Se dalla stessa sorgente viene emesso un secondo fotone dopo un tempo δt_{em} questo verrà ricevuto dall'osservatore ad un tempo $t_0 + \delta t_0$ e, supponendo che lo spazio percorso dai due fotoni sia uguale potrò scrivere

$$\int_{t_{em}}^{t_0} \frac{c dt}{a(t)} = F(r) = \int_{t_{em} + \delta t_{em}}^{t_0 + \delta t_0} \frac{c dt}{a(t)}$$

la c compare ad entrambi i membri ed è costante, può quindi essere estratta dall'integrale e semplificata

$$\int_{t_{em}}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_{em} + \delta t_{em}}^{t_0 + \delta t_0} \frac{dt}{a(t)}$$

e integrando

$$\begin{aligned} \frac{t_0}{a_0} - \frac{t_e}{a(t)} &= \frac{t_0}{a_0} + \frac{\delta t_0}{a_0} - \frac{t_e}{a(t)} - \frac{\delta t_e}{a(t)} \\ \frac{\delta t_0}{a_0} &= \frac{\delta t_e}{a(t)} \Rightarrow \frac{1}{a_0 \nu_0} = \frac{1}{a(t) \nu_e} \end{aligned}$$

dove ν_0 e ν_e sono le frequenze osservata ed emessa. Posso quindi scrivere

$$a_0 \nu_0 = a(t) \nu_e \Rightarrow \frac{a_0}{\lambda_0} = \frac{a(t)}{\lambda_e} \Rightarrow \frac{\lambda_0}{\lambda_e} = \frac{a_0}{a(t)}$$

e dunque λ_0 è una misura di quanto è cambiato il fattore di scala dall'emissione all'osservazione. Ho quindi che z è una funzione crescente andando indietro con il tempo

$$1 + z = \frac{a_0}{a(t)} \quad (1.6)$$

Questa legge può essere ottenuta anche partendo dalla formula per l'effetto doppler relativistico⁸ ma non è corretto affermare che lo z cosmologico sia dovuto ad un effetto doppler essendo piuttosto lo spazio a dilatarsi e con esso tutto ciò che vi è immerso, onde elettromagnetiche comprese.

⁸ $\lambda_0 = \frac{\lambda_e \sqrt{1+\beta^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}$

Consideriamo ora due punti P e Q a distanza dl l'uno dall'altro. Per quanto detto fin'ora Q si muove rispetto a P con velocità radiale istantanea

$$dv_Q = H \, dl = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} dl \quad (1.7)$$

Supponiamo ora che dal punto Q venga emesso un fotone di frequenza ν che arriva in P dopo un tempo $t + \delta t$, ho che

$$\delta t = \frac{dl}{c} \quad (1.8)$$

cioè il fotone percorre uno spazio $dl + \delta l$ per arrivare in P. La distanza tra i due punti aumenta infatti nel tempo a causa dell'espansione dell'Universo. Inserendo la (1.7) e la (1.8), nella formula per l'effetto doppler⁹ abbiamo

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} \approx -\frac{dv_Q}{c} = -\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \frac{dl}{c} = -\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} dt = -\frac{da}{a} \frac{1}{dt} dt$$

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} \approx -\frac{da}{a}$$

$$\nu_e a(t) = \nu_0 a_0$$

Abbiamo quindi ritrovato la stessa identica uguaglianza dalla quale sopra siamo arrivati a definire il redshift. Non è la sorgente che si muove ma lo spazio che si espande (se $z > 0$).

Si consideri una particella test, vogliamo sapere come varia la sua velocità vista da un osservatore comovente, per il quale cioè la variazione sarà uguale alla variazione nell'espansione dell'Universo. L'osservatore è fisso nell'Universo che si espande, la particella si muove a velocità v_P e dopo un tempo dt avrà percorso uno spazio $dl = v_P dt$. Se indichiamo la variazione di velocità della particella riscontrata dall'osservatore comovente come $dv = H \, dl = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} dt$ possiamo trovare la velocità che ha la particella trascorso dt

$$v_P(t + \delta t) = v_P(t) - dv = v_P(t) - \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} dl = v_P(t) - \frac{da}{dt} \frac{1}{a(t)} v_P(t) dt = v_P(t) \left(1 - \frac{da}{a}\right)$$

Dalla quale riordinando otteniamo

$$\frac{v_P(t + \delta t) - v_P(t)}{v_P(t)} = \frac{dv_P}{v_P} = -\frac{da}{a} \Rightarrow \ln v_P \propto -\ln a$$

Da cui quindi

$$v_P \propto a^{-1}$$

il moto di espansione dell'universo tende a decrescere come a^{-1} .

⁹ $\Delta\nu/\nu = v/c$

1.4 Il Parametro di Decelerazione

Ci si chiede quale sia l'andamento di $a(t)$, per prima cosa la sviluppiamo in serie di Taylor attorno al punto (temporale) in cui abbiamo maggiore informazione, cioè oggi.

$$\begin{aligned} a(t) &= a_0 + \left. \frac{d a(t)}{d t} \right|_{t=t_0} (t - t_0) + \left. \frac{d^2 a(t)}{d t^2} \right|_{t=t_0} (t - t_0)^2 + \dots = \\ &= a_0 \left[1 + \frac{1}{a_0} \dot{a}_0 (t - t_0) + \frac{1}{2a_0} \ddot{a}_0 (t - t_0)^2 + \dots \right] \end{aligned}$$

Abbiamo già introdotto il parametro di Hubble $H(t)$ e il suo valore oggi ($H_0 = \dot{a}_0/a_0$), definiamo ora il **Parametro di Decelerazione**

$$q(t) := - \frac{a(t) \ddot{a}(t)}{\dot{a}^2(t)} \quad (1.9)$$

secondo parametro cosmologico di importanza cruciale, è un modo per indicare la derivata seconda di $a(t)$ ed è espresso in modo tale da essere adimensionale a differenza del parametro $H(t)$ (che invece dipende dalla derivata prima di $a(t)$ e ha le dimensioni di una frequenza). Viene definito negativo (segno meno) poichè nelle equazioni di Friedmann (che vedremo più avanti) è impossibile ottenere un'accelerazione ma tutti gli universi risultanti sono “decelerati” nel loro moto di espansione. Ricordare questo punto poichè quando vedremo le equazioni di Friedmann il parametro $q(t)$ sarà sempre positivo, essendo il segno meno già insito nella sua definizione. Può essere ovviamente definito nel suo valore odierno come

$$q_0 := - \frac{a_0 \ddot{a}_0}{\dot{a}_0^2}$$

Posso quindi riscrivere l'espansione di $a(t)$ come

$$a(t) = a_0 [1 + H_0(t - t_0) - q_0 H_0^2 (t - t_0)^2 + \dots]$$

Più termini vado a considerare nell'espansione in serie maggiore diventa l'importanza della decelerazione poichè mi allontanano dall'“oggi”, il secondo termine dell'espansione dipende dalla derivata prima e quindi dal parametro di Hubble, il terzo dalla derivata seconda e quindi dal parametro di decelerazione. Ma finchè ci si mantiene nei dintorni dell'universo attuale è possibile scrivere

$$z = H_0(t_0 - t) + \left(1 + \frac{q_0}{2}\right) H_0^2 (t_0 - t)^2 + \dots \quad (1.10)$$

oppure, invertendo la formula

$$t_0 - t = \frac{1}{H_0} \left[z - \left(1 - \frac{q_0}{2}\right) z^2 + \dots \right] \quad (1.11)$$

dove si dice $t_0 = \text{Età dell'Universo}$. Dunque per misurare il tempo t_0 devo conoscere in prima approssimazione H_0 e in seconda istanza q_0 . Posso anche trovare un'espressione per r in funzione del redshift z ricordando che, per un raggio di luce,

$$\int_t^{t_0} \frac{c \, dt}{a(t)} = \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}} \quad (1.12)$$

che diventa, usando la (1.6) e la (1.10),

$$\frac{c}{a_0} \int_t^{t_0} [1 + H_0(t - t_0) - q_0 H_0^2(t - t_0)^2 + \dots] dt = r + \mathcal{O}(r^3)$$

e perciò

$$r = \frac{c}{a_0} [(t - t_0) - \frac{1}{2} H_0(t - t_0)^2 + \dots]$$

che usando la (1.11) diventa

$$r = \frac{c}{a_0 H_0} [z - \frac{1}{2} (1 + q_0) z^2 + \dots]$$

Tutte queste formule ricavate dall'espansione in serie di $a(t)$ sono utili per capire il significato fisico dei parametri ma verranno tutte ricavate in forma più generale anche se saranno risolvibili analiticamente solo nel caso di universi piatti, in tutti gli altri casi avremo le loro forme integrali.

1.5 Distanze Cosmologiche

Si è già accennato che non esiste una definizione assoluta di “distanza” in cosmologia ma che questa dipende dal contesto (stato di moto dell'osservatore, posizione nello spazio...). Il sistema di coordinate comoventi adottato è collegato al concetto di distanza propria (i.e. la distanza misurata in una Ipersuperficie di tempo proprio costante) in spazi descritti dalla metrica FRW. Questo tipo di misura di distanza non può però essere fatto, ovviamente, per gli oggetti astronomici dei quali posso misurare solo la luce emessa che impiega un tempo finito ad arrivare a noi.

Il legame che lega il flusso di energia l ricevuto da una sorgente e la sua luminosità intrinseca L dipendente dalla distanza della sorgente d_L

$$l = \frac{L}{4\pi d_L^2} \quad (1.13)$$

dove d_L è detta **Distanza in Luminosità**. Su questa misura della distanza si basa il concetto di **Candela Standard**, ovvero oggetti di luminosità nota che possono essere usati per scalare le distanze misurate. Dobbiamo però tenere conto anche di altri due fenomeni in Cosmologia cioè il *redshift* e la *dilatazione dei tempi* (poichè quando si parla di luminosità e flussi ho a che fare con energie nell'unità di tempo¹⁰). Entrano quindi in gioco due fattori $\frac{a_0}{a}$ uno dovuto al redshift e l'altro alla dilatazione dei tempi poichè $\delta t_0 = (a_0/a)\delta t$. Troviamo quindi

$$l = \frac{L}{4\pi a_0^2 d_L^2} \left(\frac{a_0}{a}\right)^2$$

che per la (1.6) diventa

$$l = \frac{L}{4\pi a_0^2 d_L^2} (1 + z)^{-2}$$

da cui quindi la definizione di **distanza in luminosità**

¹⁰Per il flusso ho energia per unità di tempo per unità di superficie.

$$d_L = a_0 r (1 + z) \quad (1.14)$$

Questa misura della distanza sarà quella usata quando tratteremo con le luminosità degli oggetti¹¹.

Altra misura classica delle distanze è la **Distanza in Diametro Angolare** o Distanza Angolare, d_A . È definita in maniera tale da preservare le caratteristiche geometriche proprie di uno spazio Euclideo. L'angolo sotto cui vediamo un oggetto di dimensione nota $D_{pr}(t)$ (diametro proprio dell'oggetto) ci dà la distanza di tale oggetto posto alle coordinate fissate r e t . Se denotiamo l'angolo sotto cui osservo l'oggetto con $d\theta$, supponendo di stare osservando l'oggetto allineato, cioè tale che i punti che lo compongono siano tutti alla stessa distanza $dr = 0$ e $d\phi = 0$, e che la luce ci arrivi tutta allo stesso istante ($dt = 0$), dovrà valere l'equivalenza

$$ds^2 = a^2(t)r^2 d\theta^2 \equiv D_{pr}^2$$

da cui

$$D_{pr} = a(t)r d\theta$$

e per angoli piccoli potremo definire

$$d_A := \frac{D_{pr}}{\Delta\theta} \quad (1.15)$$

Questa distanza è collegata alla distanza in luminosità¹² dalla

$$d_A = a(t)r = \frac{d_L}{(1+z)^2} \quad (1.16)$$

detta **relazione di dualità**, valida se è valida la metrica FRW. Ma se la FRW non valesse non sarebbe valido il Principio Cosmologico, assunzione base della cosmologia, quindi la validità di tale relazione è un buon test sulle nostre assunzioni. Ad oggi non sono state misurate deviazioni significative e quindi tutto il nostro costruito teorico regge.

1.5.1 I test $m - z$ ed $N - z$

Le relazioni generali che abbiamo ricavato tra il redshift e la distanza ci permettono di trovare alcune interessanti proprietà dell'Universo che potrebbero, in principio, essere usate per sondare la geometria spaziale e, in particolare, per testare il Principio Cosmologico, l'implementazione del quale porta a delle difficili complicazioni nella teoria (se ne parlerà più avanti). Se sulle grandi scale le galassie e gli ammassi sono distribuiti in maniera omogenea ed isotropa, è interessante considerare due relazioni: $m - z$ tra magnitudine apparente di un oggetto e il suo redshift ed $N(> l) - z$ tra il numero di sorgenti con luminosità apparente maggiore di un determinato valore l e redshift minore di z . Tali relazioni sono importanti anche perchè, sempre in linea di principio, sarebbero un modo per determinare il parametro di decelerazione q_0 .

Ci si chiede quindi come scalano le magnitudini con la distanza in luminosità d_L . Prendiamo la relazione per la magnitudine apparente di un oggetto

¹¹All'interno dell'espressione entreranno dei numeri quando conosceremo gli andamenti di a e r .

¹²Quale delle due distanze scelgo di usare dipende dal problema.

$$m = -2.5 \log L \quad (1.17)$$

da normalizzare per la magnitudine assoluta $M = m(d = 10 \text{ pc})$. Abbiamo che

$$d_L = a_0 r(1+z) = \frac{cz}{H_0} \left[1 + \frac{z}{2}(1-q_0) + \dots \right] \quad (1.18)$$

Ora, poichè valgono (1.13) e (1.17), possiamo scrivere

$$l = \frac{L}{4\pi} \left(\frac{H_0}{cz} \right)^2 \left[1 + \frac{z}{2}(1-q_0) \right]^{-2} = \frac{L}{4\pi} \left(\frac{H_0}{cz} \right)^2 [1 - (1-q_0)z + \dots]$$

dove nell'ultimo passaggio si è espanso in serie per piccoli z . Dalla definizione di magnitudine assoluta, ho

$$d_{L[\text{pc}]} = 10^{1+(m-M)/5}$$

da cui ottengo la (solita) formula per il **modulo di distanza**

$$(m - M) = -5 + 5 \log(d_{L[\text{pc}]})$$

E quindi portando la (1.18) ai logaritmi ottengo¹³

$$\begin{aligned} \log d_L &= \log(cz) - \log H_0 + \log \left[1 + \frac{1}{2}z(1-q_0) \right] = \\ &= \log(cz) - \log H_0 + \frac{z}{2} \frac{1-q_0}{\ln 10} = \log(cz) - \log H_0 + 0.217(1-q_0)z \end{aligned}$$

E quindi applicandola alla formula per il modulo di distanza, per distanze in Megaparsec (unità di misura utilizzata in cosmologia¹⁴), ottengo

$$(m - M) = 25 + 5 \log(cz) - 5 \log H_0 + 1.086(1-q_0)z + \dots$$

dove $[H_0] = km s^{-1} Mpc^{-1}$ e $[c] = km s^{-1}$. Se riuscissi quindi a trovare il modulo di distanza per un oggetto riuscirei a ricavare H_0 e q_0 . Ho bisogno di oggetti di nota magnitudine assoluta. Per le alte distanze coinvolte in cosmologia devo utilizzare oggetti molto luminosi come le Supernovae che sono ottime candele **standardizzabili**. In realtà comunque l'espressione di $m(z)$ è sensibile a q_0 solo per $z > 0.1$ ed è accurata nel calcolarlo solo per $z < 0.2$. La relazione risulta più efficace per calcolare una stima di H_0 e con essa una conferma della legge di Hubble e quindi del Principio Cosmologico.

Un altro test importante di questo principio è il cosiddetto **Test di Hubble**, che si basa sulla densità di oggetti $N(> l)$ con flusso maggiore di una certa quantità l in funzione di l . Se l'Universo fosse **Euclideo** e le galassie avessero tutte la stessa luminosità L e fossero distribuite uniformemente con densità numerica media n_0 avremmo

$$N(l) = \frac{4\pi}{3} n_0 d_L^3$$

¹³Remember:

$$\log(1+x) = \frac{x}{\ln 10}$$

¹⁴Ai logaritmi per passare da parsec a megaparsec devo sommare all'espressione in parsec $6 \cdot 5 = 30$

Poiché

$$d_L = \left(\frac{L}{4\pi l} \right)^{1/2}$$

avremmo

$$N(l) = \frac{4\pi}{3} n_0 \left(\frac{L}{4\pi l} \right)^{3/2} \propto l^{-3/2}$$

che mi dice come scalerebbero i conteggi di oggetti di luminosità limite l in un Universo perfettamente Euclideo. Ora, poiché $m = -2.5 \log l + \text{cost}$ allora

$$\log N(l) \propto -1.5 \log l \propto 0.6 m + \text{cost}$$

valida anche per sorgenti con una distribuzione di luminosità arbitraria intorno ad L . Se trovassi però deviazioni da questa legge vorrebbe dire che l'Universo non è Euclideo. Infatti se la densità n_0 è costante, contare il numero di oggetti equivale a misurare il volume in cui questi sono distribuiti¹⁵.

Nel caso **non Euclideo** abbiamo

$$N(l) = 4\pi \int_0^r \frac{r'^2 n[t(r')] a^3[t(r')]}{(1 - Kr'^2)^{1/2}} dr'$$

dove $t(r')$ è il tempo al quale una sorgente in r' ha emesso la radiazione che arriva ora all'osservatore. Se le galassie non vengono né create né distrutte nell'intervallo di tempo tra $t(r')$ e t_0 allora l'espansione dello spazio porta ad una diminuzione della densità di oggetti e possiamo scrivere

$$n_0 a_0^3 = n(t) a^3(t) \quad (1.19)$$

che ci permette di semplificare l'integrale:

$$N(l) = 4\pi n_0 a_0^3 \int_0^r \frac{r'^2}{(1 - Kr'^2)^{1/2}} dr'$$

Ora posso sviluppare in serie di Taylor

$$r^2(1 - Kr^2)^{-1/2} = r^2 \left(1 + \frac{1}{2} Kr^2 \right)$$

e quindi sostituisco e risolvo l'integrale

$$N(l) = 4\pi n_0 a_0^3 \left(\frac{r^3}{3} \frac{r^5 K}{10} + \dots \right)$$

Ricordando che

$$r = \frac{c}{a_0 H_0} \left[z - \frac{1}{2} (1 + q_0) z^2 \right]$$

¹⁵ $V = N/n_0$

posso scrivere la distribuzione di oggetti in forma logaritmica

$$\begin{aligned}\log N(l) &= \text{cost} + 3 \log z - \frac{3}{2 \ln 10} (1 + q_0) z = \\ &= \text{cost} + 3 \log z - 0.651 (1 + q_0) z\end{aligned}$$

A z bassi prevale la parte costante mentre a z alti diventiamo sempre più sensibili agli altri termini. Anche in questo caso tale relazione è utile per ricavare q_0 fintanto che ci si mantiene a $z < 0.2$, valore oltre il quale anche la parte costante comincia a dipendere sensibilmente da z e quindi a non essere più costante. Andando a redshift troppo elevati infatti l'ipotesi (1.19) non è più valida poichè diventano evidenti gli effetti evolutivi sulle galassie (formazione/distruzione).

1.6 Il Paradosso di Olbers

Prima dell'avvento della Relatività Einsteiniana, gli astronomi credevano che l'Universo fosse infinito, omogeneo, Euclideo e statico. Tale visione venne ovviamente meno con la scoperta del moto di espansione delle galassie descritto dalla legge di Hubble nel 1929. Rimane comunque interessante trattare il **Paradosso di Olbers** (Olbers 1826) nato in seno al modello pre-Einsteiniano di Universo del Diciottesimo Secolo. Tale paradosso nasce dalla semplice osservazione che di notte l'Universo non ci appare luminoso. Nel contesto dell'Universo del Diciottesimo Secolo la luminosità apparente l di una stella di luminosità assoluta L posta a distanza r da un osservatore è semplicemente

$$l = \frac{L}{4\pi r^2}$$

se si assume come trascurabile l'assorbimento. Assumiamo, per semplicità, che tutte le stelle abbiano la stessa luminosità assoluta e una densità numerica costante per unità di volume n . L'energia radiativa che arriva ad un osservatore da tutto l'Universo allora è

$$l_{tot} = \int_0^\infty n 4\pi r^2 \frac{L}{4\pi r^2} dr = nL \int_0^\infty dr \rightarrow \infty$$

,

quindi il cielo dovrebbe avere luminosità infinita $\Rightarrow$ Paradosso di Olbers. Si postulò in passato che potesse essere risolto postulando l'esistenza di assorbimento interstellare da polvere ma anche in questo caso la polvere avrebbe dovuto prima o poi, nella storia di vita dell'Universo, termalizzare con la radiazione (assorbimento = emissione) riportando allo stesso paradosso¹⁶.

Il paradosso si risolve con l'avvento della Relatività (ristretta e generale) che ci dice come le ipotesi da cui nasce sono violate su molti livelli: l'Universo potrebbe non essere infinito in estensione né eterno; la luce dalle stelle lontane sarebbe spostata verso il rosso; la geometria non deve essere necessariamente piatta. In effetti, le ragioni base per le quali un Paradosso di Olbers non sorge sono molto più semplici di ognuna di queste possibilità. La ragione chiave è che nessuna stella di massa M può bruciare all'infinito ma ha un tempo di vita finito al massimo uguale al tempo necessario ad irradiare tutta la sua energia Mc^2 . Sappiamo tra l'altro che l'energia irraggiata è molto minore di questa quantità. Andando sempre più in profondità con le osservazioni dovremmo vedere stelle sempre più vecchie e quindi per

¹⁶È da notare che ai tempi della formulazione di questa ipotesi da parte di Lord Kelvin non si sapeva che la luce ed il calore fossero due aspetti dello stesso fenomeno e quindi l'ipotesi era ragionevole.

poter essere osservabili uniformemente (i.e. osservo una stella bruciare in ogni punto dello spazio-tempo) si sarebbero dovute accendere a tempi diversi. Questa coordinazione non solo sarebbe innaturale ma richiederebbe anche che ci trovassimo in una posizione privilegiata dell'Universo violando il Principio Cosmologico. In ogni Universo che rispetta $E = mc^2$ ed il Principio Cosmologico non ci si aspetta di osservare un cielo notturno infinitamente brillante. Misurare quanta radiazione di fondo è presente nell'Universo può essere inoltre un test per i modelli cosmologici nella stessa maniera in cui lo è il test sul conteggio di oggetti presentato nel Paragrafo 1.5.1.

1.7 Le Equazioni di Friedmann

Alla base di ogni modello cosmologico relativistico ho il sistema di **Equazioni di Einstein** (senza costante cosmologica)

$$R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{ij} \quad (1.20)$$

dove R_{ij} è il tensore di Ricci e R lo scalare di Ricci. Questa equazione della relatività generale afferma che la geometria dello spazio-tempo (dell'Universo), espressa dal tensore metrico g_{ij} , è determinata dal suo contenuto energetico (ed equivalentemente di materia), grandezza espressa dal tensore energia-impulso T_{ij} . Al primo membro ho la parte spaziale dell'equazione e al secondo la parte energetica. L'equazione mi dice che una particella di prova si muove lungo lo spazio tempo lungo una geodetica, che è una traiettoria nello spazio quadri-dimensionale, la quale lunghezza è stazionaria per piccole variazioni lungo la traiettoria. Ciò che devo trovare sono quindi i tensori g_{ij} e T_{ij} . Nel modello del Big-Bang si assume la metrica FRW¹⁷ (da cui ottengo anche R_{ij} e R) e come tensore energia-impulso quello di un fluido perfetto

$$T_{ij} = -pg_{ij} + (p + \rho c^2)U_i U_j \quad (1.21)$$

dove p è la pressione ρc^2 la densità di energia (che include l'energia della massa riposo), e U_k la quadrivelocità. Sono queste assunzioni che determinano pregi e difetti del modello del Big-Bang.

Il sistema prevede 16 equazioni ($i, j = 0, 1, 2, 3$) di cui solo due sono indipendenti, la componente tempo-tempo

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi}{3}G\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right)a \quad (1.22)$$

,

e la componente spazio-spazio

$$a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2Kc^2 = 4\pi G\left(\rho - \frac{p}{c^2}\right)a^2 \quad (1.23)$$

,

tutte le altre sono identità. Prendendo la (1.22) e sostituendo $\ddot{a}$ nella (1.23) ottengo

$$-\frac{4\pi}{3}G\rho a^2 - \frac{3p}{c^2}a^2\frac{4\pi}{3}G + 2\dot{a}^2 + 2Kc^2 = 4\pi G a^2 \rho - 4\pi G \frac{\rho}{c^2}a^2$$

¹⁷Ricordare che la metrica FRW è stata definita in accordo con il Principio Cosmologico e dunque assumerla significa assumere il Principio Cosmologico.

cioè riordinando e semplificando

$$\dot{a}^2 + Kc^2 = \frac{8\pi}{3}G\rho a^2 \quad (1.24)$$

La (1.22) e la (1.24) sono dette **Prima e Seconda Equazione di Friedmann**, rispettivamente. Nella prima compaiono la pressione e la densità, nella seconda la densità ed il parametro di curvatura. Fare modelli cosmologici significa risolvere queste due equazioni.

Introduciamo inoltre una terza equazione utile detta **Condizione di Adiabaticità** per assicurarci che l'Universo non perda energia¹⁸

$$d\mathcal{U} = -p dV$$

che in cosmologia prende il significato di *espansione adiabatica dell'Universo*

$$d(\rho c^2 a^3) = -p da^3 \quad (1.25)$$

con $\mathcal{U} = \rho c^2 a^3$ e $V = a^3$, il volume dell'Universo si espande...

Queste 3 equazioni non sono indipendenti (se ne ho due posso ottenere la terza). Ad esempio la seconda equazione di Friedmann deriva dalla prima nel caso di Universo in espansione adiabatica, cioè (1.22) + (1.25) $\Rightarrow$ (1.24).

La (1.25) pu' essere scritta in altre due forme

$$\dot{p}a^3 = \frac{d}{dt}[a^3(\rho c^2 + p)] \quad (1.26)$$

$$\dot{\rho} + 3\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)\frac{\dot{a}}{a} = 0 \quad (1.27)$$

Sottolineiamo infine che la densità che compare in queste equazioni è da intendersi con la somma dei contributi di tutte le componenti dell'Universo: energia, materia, DM, ecc..

1.8 Un Approccio Newtoniano

Vogliamo ora ricavare le Equazioni di Friedmann in maniera Newtoniana. Esistono infatti due teoremi classici che hanno un analogo in relatività generale. Sono il teorema di Gauss della gravità ed un suo corollario, ovvero i due Teoremi dei Gusci Sferici. In relatività generale gli analoghi di questi due teoremi sono

Teorema di Birkhoff (1923): se un corpo ha un campo gravitazionale a simmetria sferica (i.e. campo gravitazionale generato da una massa puntiforme) in uno spazio vuoto questo è statico e può essere descritto con la metrica di Schwarzschild.

Corollario: all'interno di un guscio sferico di materia omogeneo unica sorgente di campo gravitazionale in uno spazio vuoto, lo spazio-tempo può essere descritto con la metrica di Minkowsky.

L'esistenza di questi due teoremi ci permette di giustificare un approccio Newtoniano allo studio dell'evoluzione temporale di una distribuzione di materia omogenea ed isotropa.

¹⁸L'Universo preso nella sua interezza è un sistema chiuso che non scambia calore con l'esterno, perchè per quanto ne sappiamo non c'è un "esterno".

Consideriamo come evolve una massa m contenuta all'interno di una sfera di raggio l centrata in O in un Universo omogeneo ed isotropo. Come detto, lo spazio all'interno della sfera è piatto (corollario al Teorema di Birkhoff). Se il raggio l è tale che

$$\frac{GM}{lc^2} \ll 1$$

che non significa altro se non

$$\tau_{FF} \propto \frac{1}{\sqrt{G\rho}} \gg \tau_{\text{cross}} = \frac{l}{c}$$

dove τ_{FF} è il tempo di Free Fall, tempo scala per le interazioni dinamiche, e dove τ_{cross} è il tempo che impiega la luce ad attraversare il guscio sferico. Equivalentemente può anche essere intesa come

$$l \gg R_S$$

ovvero che il raggio della sfera sia molto maggiore del raggio di Schwarzschild corrispondente alla massa M , cioè $R_S = 2MG/c^2$. Se scrivo l'equazione del moto Newtoniana¹⁹ di una massa unitaria che si muove sulla superficie del guscio sferico avrò

$$\frac{d^2 l}{dt^2} = -\frac{GM}{l^2} \quad (1.28)$$

moltiplicando entrambi i membri per $\dot{l}$ arrivo alla

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{l}^2}{2} \right) = -\frac{d}{dt} \left(\frac{GM}{l} \right)$$

che integrando mi da

$$\frac{\dot{l}^2}{2} = -\frac{GM}{l} + \text{cost} \quad (1.29)$$

ovvero l'equazione di conservazione dell'energia. Ci mettiamo ora in un sistema di riferimento comovente

$$l = d_C \frac{a}{a_0} = D a$$

dove si è definito $D := d_C/a_0$ con d_C la distanza comovente e a_0 costante. Posso quindi riscrivere la (1.29) in funzione di a

$$\begin{aligned} \frac{D^2 \dot{a}^2}{2} &= \frac{GM}{Da} + \text{cost} \\ \dot{a}^2 &= \frac{2GM}{D^3 a} + \text{cost}' = \frac{2G}{D^3 a} \frac{4}{3} \pi \rho D^3 a^3 + \text{cost}' \\ \dot{a}^2 &= \frac{8\pi}{3} G a^2 \rho + K c^2 \end{aligned} \quad (1.30)$$

¹⁹ $a = F/m$

L'ultima equazione scritta è identica alla Seconda Equazione di Friedmann poichè, con una appropriata definizione di d_C ,

$$cost' = K \left(\frac{d_C c}{a_0} \right)^2 = K c^2$$

. Ma questo significa che

- $K = 0 \Rightarrow$ perfetto equilibrio tra i termini cinetico e gravitazionale (**Espansione Infinita**);
- $K = 1 \Rightarrow$ il termine gravitazionale prevale su quello cinetico (scenario del **Big-Crunch**);
- $K = -1 \Rightarrow$ il termine cinetico prevale su quello gravitazionale (**Evaporazione**).

Questa analisi è puramente qualitativa ma la rivedremo più avanti in maniera più dettagliata e formale, affrontando il problema in maniera quantitativa.

L'equazione (1.28) implica che non siano presenti forze dovute a gradienti di pressione, in accordo con le assunzioni di omogeneità ed isotropia del Principio Cosmologico. L'equazione (1.30) è stata ottenuta sotto l'assunzione che la sfera contenesse esclusivamente materia non relativistica ($p \ll \rho c^2$). Sviluppiamo ora la massa come densità per volume nella (1.28)

$$\frac{d^2 l}{dt^2} = -\frac{GM}{l^2} = -\frac{G}{l^2} \frac{4\pi}{3} l^3 \rho = \frac{4\pi}{3} G l \rho$$

Un risultato della relatività ci dice che qui, in presenza di particelle relativistiche, dobbiamo sostituire la densità con

$$\rho_{eff} = \rho + \frac{3p}{c^2}$$

allora

$$\frac{d^2 l}{dt^2} = \frac{4\pi}{3} G l \left(\rho + \frac{3p}{c^2} \right)$$

che, se $l = D a$, diventa

$$\ddot{a} = \frac{4\pi}{3} G \left(\rho + \frac{3p}{c^2} \right) a \quad (1.31)$$

ovvero la Prima Equazione di Friedmann. È importante notare che, moltiplicando entrambi i membri della (1.31), ottengo

$$\frac{1}{2} \frac{d \dot{a}^2}{dt} = \frac{4\pi G}{3} \left(\rho a \dot{a} + \frac{3p a \dot{a}}{c^2} \right) \quad (1.32)$$

Se ora prendo la condizione di adiabaticità (1.25) e la differenzio

$$c^2(\dot{\rho}a^3 + 3a^2\dot{a}\rho) = -p3a^2\dot{a}$$

$$\frac{3pa\dot{a}}{c^2} = -a^2\dot{\rho} - 3a\dot{a}\rho$$

che sostituita nella (1.32) mi dà

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \dot{a}^2 &= -\frac{4\pi}{G} (\rho a \dot{a} - a^2 \dot{\rho} - 3a \dot{a} \rho) = \\ &= \frac{4\pi}{3} G (a^2 \dot{\rho} + 2a \dot{a} \rho) = \frac{4\pi}{3} G \frac{d}{dt} (\rho a^3)\end{aligned}$$

integro in t e trovo di nuovo

$$\frac{\dot{a}}{2} = \frac{4\pi}{3} G \rho a^2 + \text{cost}$$

la Seconda Equazione di Friedmann. Quello che abbiamo dimostrato è che, applicando il Teorema di Birkhoff e reinterpretando la densità per tenere conto degli effetti relativistici intrinseci, si possono ricavare le Equazioni di Friedmann usando essenzialmente solo un approccio Newtoniano.

1.9 La Costante Cosmologica

Le Equazioni di Friedmann derivano dalla relatività generale unita al Principio Cosmologico, assumendo quindi la metrica FRW, e considerando una distribuzione di materia assimilabile ad un gas perfetto. Se si guarda la Prima Equazione di Friedmann (1.22) qui riportata

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi}{3} G \left(\rho + \frac{3p}{c^2} \right) a$$

è immediatamente evidente che un Universo statico, cioè con $\ddot{a} = \dot{a} = 0$, non potrebbe esistere a meno che

$$\rho = -\frac{3p}{c^2}$$

.

Questo significherebbe però che, o la densità di energia o la pressione, dovrebbe essere negativa. Quando Einstein sviluppò la teoria della relatività generale ottenne l'equazione (1.20) ma alla luce di quest'ultima osservazione propose una modifica, inserendovi una costante Λ detta **Costante Cosmologica** con la quale, mantenendo il formalismo covariante, ovviare al problema di densità e/o pressione negativa

$$R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R - \Lambda g_{ij} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ij} \quad (1.33)$$

.

Il problema di Einstein era che, prima della scoperta dell'espansione dell'Universo da parte di Hubble, si pensava l'Universo dovesse essere statico, per questo tutti questi sforzi nel correggere le equazioni.

Nonostante il concetto sia oramai superato sviluppiamo il discorso per vederne le conseguenze. Si definiscono:

- la **pressione effettiva** come

$$\tilde{p} := p - \frac{\Lambda c^4}{8\pi G} = p + p_\Lambda \quad (1.34)$$

dove viene aggiunto un contributo negativo dipendente dalla costante cosmologica ($p_\Lambda < 0$) alla pressione;

- la **densità effettiva** come

$$\tilde{\rho} := \rho + \frac{\Lambda c^2}{8\pi G} = \rho + \rho_\Lambda \quad (1.35)$$

dove viene aggiunto un contributo negativo dipendente dalla costante cosmologica ($\rho_\Lambda > 0$) alla densità.

Da queste due equazioni si vede inoltre che $|\Lambda|^{-1/2}$ ha le dimensioni di una lunghezza. Possiamo ora riscrivere la (1.33)

$$R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R - \Lambda g_{ij} = \frac{8\pi G}{c^4} \tilde{T}_{ij} \quad (1.36)$$

dove si è definito

$$\tilde{T}_{ij} := T_{ij} + \frac{\Lambda c^4}{8\pi G} g_{ij} = -\tilde{p}g_{ij} + (\tilde{p} + \tilde{\rho}c^2)U_i U_j$$

In questa forma ottengo le Equazioni di Friedmann identiche al caso senza costante cosmologica, fatta eccezione per il fatto che dipenderanno da $\tilde{p}$ e $\tilde{\rho}$ anzichè da p e ρ . Queste equazioni ammettono una soluzione statica per

$$\tilde{\rho} = -\frac{3\tilde{p}}{c^2} = \frac{3Kc^2}{8\pi Ga^2} \quad (1.37)$$

Se si assume un Universo “di polvere”, cioè un Universo in cui la pressione ordinaria della materia può essere presa come $p = 0$, poichè trascurabile rispetto alla radiazione, abbiamo

$$\tilde{p} = -\frac{\Lambda c^4}{8\pi G}$$

Ora, per la (1.37), abbiamo

$$\frac{\tilde{p}}{c^2} = -\frac{Kc^2}{8\pi Ga^2}$$

da cui

$$\tilde{p} = -\frac{Kc^4}{8\pi Ga^2} = -\frac{\Lambda c^4}{8\pi G}$$

Quindi nell’Universo statico di Einstein

$$\Lambda = \frac{K}{a^2} \quad (1.38)$$

da cui la densità di un fluido perfetto è

$$\rho = \tilde{\rho} - \frac{\Lambda c^2}{8\pi G} = \frac{3Kc^2}{8\pi Ga^2} - Kc^2 8\pi Ga^2$$

$$\rho = \frac{kc^2}{4\pi G a^2} \quad (1.39)$$

Ma, poichè devo avere $\rho > 0$ sempre, la (1.39) dovrà essere maggiore di zero e questo mi impone di scegliere, tra i vari (tre) valori possibili, $K = 1$. Da queste considerazioni risulta che il nostro **Universo** deve essere **sferico**. Sostituendo la (1.40) nella (1.39) e risolvendo per Λ trovo il valore della costante cosmologica dell'Universo di Einstein

$$\Lambda_E = \frac{4\pi G}{c^2} \rho \quad (1.40)$$

L'Universo di Einstein è dunque sferico e reso statico (ma, come si potrebbe dimostrare, instabile) da un valore della costante cosmologica dipendente dalla densità di materia. Ha curvatura positiva e raggio di curvatura $a_E = \Lambda_E^{-1/2}$.

Quando Hubble scoprì l'esistenza dell'espansione dell'Universo Einstein credette di aver preso un granchio e tolse Λ dalle equazioni. Ma la storia ha rivelato in seguito che l'introduzione di una costante cosmologica nelle equazioni dei modelli cosmologici è necessaria e viene oggi utilizzata per formalizzare l'energia del vuoto.

Vediamo ora due modelli basati sulla costante cosmologica, il primo dei quali verrà utile più avanti quando parleremo di inflazione.

Il Modello di de-Sitter È un modello cosmologico in cui l'universo è vuoto ($p = \rho = 0$) e piatto ($K = 0$). Da (1.34) e (1.35) ho

$$\tilde{p} = -\tilde{\rho}c^2 = -\frac{\Lambda c^4}{8\pi G}$$

Sostituendo ora queste quantità nella Seconda Equazione di Friedmann per Universi di Einstein

$$\dot{a}^2 + Kc^2 = \frac{8\pi G}{3} \tilde{\rho} a^2$$

ottengo

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3} \frac{\Lambda c^2}{8\pi G} a^2 = \frac{\Lambda}{3} c^2 a^2$$

ovvero, estraendo la radice

$$\frac{da}{dt} = ac \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} \Rightarrow \frac{da}{a} = c \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} dt$$

che, integrando, mi da

$$\begin{aligned} \log a &= c \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} t + A \\ a &= A \exp\left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} ct\right) \end{aligned} \quad (1.41)$$

L'espansione nel modello di deSitter è di tipo esponenziale. Porterà ad un'espressione per il parametro di Hubble

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{A \exp(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} ct) \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} c}{A \exp(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} ct)} \Rightarrow$$

$$H = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} c \quad (1.42)$$

Questa equazione dipende solo da costanti, risulta quindi evidente che il parametro di Hubble in un Universo di deSitter è effettivamente una costante, in particolare $H \propto t$. In un Universo di questo tipo le particelle di prova si allontanano una dall'altra a causa dell'effetto gravitazionale repulsivo dovuto alla costante cosmologica positiva.

Questo modello viene utilizzato nel contesto del modello Inflazionario²⁰, dove l'espansione parossistica è di tipo esponenziale e effetti quantistici prevedono un'equazione di stato per il fluido del tipo $p \approx -\rho c^2$.

Il Modello di Lemaître Prevede invece un Universo con curvatura dello spazio positiva ($K = 1$). Si può dimostrare anche in questo caso che il parametro di espansione a è crescente con il tempo, ma ci sarà un periodo in cui rimane praticamente costante (Figura 1.2).

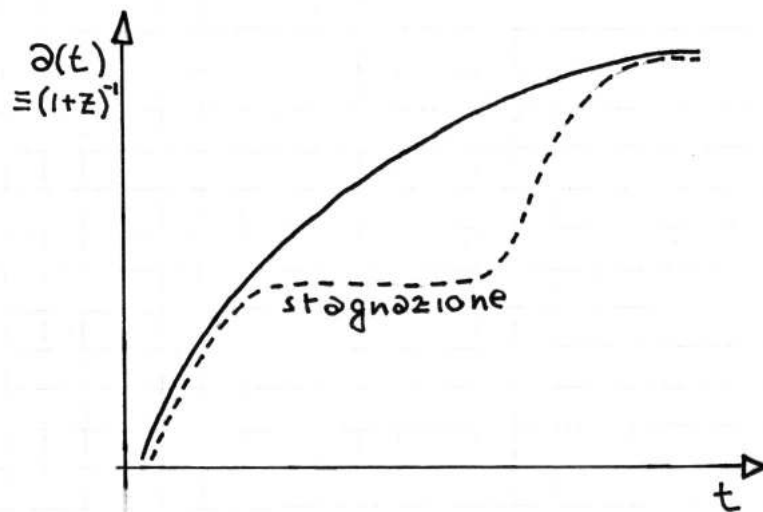


Figura 1.2: *Modello di Lemaître (tratteggiato.)*

Questo modello ebbe un certo successo negli anni '70 poichè, reintroducendo una costante cosmologica positiva, permetteva di estendere il tempo corrispondente ad uno $z = 2$. Si poteva così spiegare l'eccesso di Quasar osservati intorno a questo redshift. Quando si comprese che tale eccesso era dovuto ad effetti di selezione (bias), il modello venne abbandonato.

Tra alti e bassi la costante cosmologica è sopravvissuta fino ad oggi, venendo a volte rimossa dalla teoria ed altre volte reintrodotta. L'ultima oscillazione di questa altalena c'è stata nella seconda metà degli anni '90 quando viene re-introdotta per spiegare l'espansione accelerata dell'Universo.

²⁰Lo vedremo (molto) più avanti

Capitolo 2

I Modelli di Friedmann

Presentiamo ora i modelli cosmologici standard su cui si basa il modello del Big-Bang. Tali modelli si ottengono dalla risoluzione delle Equazioni di Friedmann e, in occidente, sebbene sviluppati nel 1922, non furono molto conosciuti fino a che Hubble non scoprì l'espansione dell'Universo. Il parroco Belga George Lemaître riottenne essenzialmente gli stessi risultati nel 1927, quando le scoperte di Hubble cominciavano ad essere note alla comunità scientifica, e spesso è lui ad essere considerato il padre della moderna Teoria del Big-Bang, sebbene tale onore dovrebbe probabilmente spettare a Friedmann.

In primis assumiamo un fluido perfetto con una certa densità ρ e una certa pressione p . Per ora non ci preoccupiamo della forma che assume l'equazione di stato che lega queste due quantità e non consideriamo inizialmente neanche la costante cosmologica.

Dobbiamo risolvere le Equazioni di Friedmann che riportiamo qui per comodità insieme anche alla condizione di adiabaticità:

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi}{3}G\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right)a \quad (2.1)$$

$$\dot{a}^2 + Kc^2 = \frac{8\pi}{3}G\rho a^2 \quad (2.2)$$

$$d(\rho a^3) = -3\frac{p}{c^2}a^2 da \quad (2.3)$$

Tali equazioni ci permettono, in linea di principio, di calcolare l'evoluzione temporale di $a(t)$, $\rho(t)$ e $p(t)$ nota l'equazione di stato.

Consideriamo ora di trovarci ad un determinato istante di tempo t_0 che coincide con l'“oggi”. In questo caso $H_0 = \frac{\dot{a}_0}{a_0}$ e definiamo

$$\rho_{crit} := \frac{3H^2}{8\pi G} \quad (2.4)$$

una, ancora non meglio specificata, **Densità Critica**, che a t_0 è scrivibile

$$\rho_{crit,0} := \frac{3H_0^2}{8\pi G} \quad (2.5)$$

Se prendiamo ora la (2.2) calcolata oggi e la riscriviamo come

$$\left(\frac{\dot{a}_0}{a_0}\right)^2 = -\frac{Kc^2}{a_0^2} + \frac{8\pi G}{3}\rho a_0^2 \frac{H_0^2}{H_0^2} \frac{1}{a_0^2} =$$

$$= \left(\frac{\dot{a}_0}{a_0} \right)^2 = -\frac{Kc^2}{a_0^2} + \rho \left(\frac{\dot{a}_0}{a_0} \right)^2 \frac{H_0^2}{\rho_{crit,0}}$$

da cui quindi

$$H_0^2 \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_{crit,0}} \right) = -\frac{Kc^2}{a_0^2} \quad (2.6)$$

Per i valori che può assumere K avr'ò che, dalla (2.6),

- per $K = -1 \Rightarrow 1 - \frac{\rho_0}{\rho_{crit,0}} > 0 \Rightarrow \rho_0 < \rho_{crit,0}$;
- per $K = 0 \Rightarrow 1 - \frac{\rho_0}{\rho_{crit,0}} = 0 \Rightarrow \rho_0 = \rho_{crit,0}$;
- per $K = +1 \Rightarrow 1 - \frac{\rho_0}{\rho_{crit,0}} < 0 \Rightarrow \rho_0 > \rho_{crit,0}$.

Introduciamo il **Parametro di Densità**

$$\Omega := \frac{\rho}{\rho_{crit}} \quad (2.7)$$

e, ovviamente, $\Omega_0 := \frac{\rho_0}{\rho_{crit,0}}$. Le relazioni di sopra diventano quindi

- $K = -1 \Rightarrow \Omega_0 < 1$ Universo Iperbolico;
- $K = 0 \Rightarrow \Omega_0 = 1$ Universo Piatto;
- $K = +1 \Rightarrow \Omega_0 > 1$ Universo Ipersferico.

Per conoscere Ω_0 devo conoscere $\rho_{crit,0}$ e quindi H_0 , il valore attualmente accettato è

$$H_0 = h \cdot 100 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} \quad \text{con } h \approx 0.7$$

Ricordando la definizione (2.5) otteniamo il valore della densità critica oggi, dipendente dal tipo di Universo in cui viviamo tramite la costante adimensionale h

$$\rho_{crit,0} = 1.9 \cdot 10^{-29} h^2 \text{ g/cm}^3 = 2.775 \cdot 10^{11} h^2 M_\odot / \text{Mpc}^3 \quad (2.8)$$

Quindi per conoscere la geometria dell'Universo mi servirebbe conoscerne la densità oggi.

Vediamo ora cosa succede se si re-introduce la costante cosmologica. Nel Paragrafo 1.9 abbiamo visto che Λ può essere trattata come un fluido con una strana equazione di stato, che porta ad una modifica all'Equazione della Gravità di Einstein (1.36). Le Equazioni di Friedmann (2.1) e (2.2) dovranno avere quindi un termine aggiuntivo, vogliamo trovare tale termine. Cominciamo dalla Prima Equazione di Friedmann(2.1), con i termini p e ρ sostituiti da $\tilde{p}$ e $\tilde{\rho}$ (come definite in (1.34) e (1.35)) essa diventa

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3} a \left[\rho + \frac{\Lambda c^2}{8\pi G} + \frac{3}{c^2} \left(p - \frac{\Lambda c^4}{8\pi G} \right) \right] = -\frac{4\pi G}{3} a \left(\rho + \frac{3p}{c^2} - \frac{2\Lambda c^2}{8\pi G} \right)$$

che posso riscrivere

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3} a \left(\rho + \frac{3p}{c^2} \right) + \frac{\Lambda c^2 a}{3} \quad (2.9)$$

Anche la Seconda Equazione di Friedmann presenta un termine aggiuntivo:

$$\begin{aligned}\dot{a}^2 + Kc^2 &= \frac{8\pi G}{3}a^2\left(\rho + \frac{\Lambda c^2}{8\pi G}\right) \\ \dot{a}^2 + Kc^2 &= \frac{8\pi G}{3}\rho a^2 + \frac{\Lambda c^2 a^2}{3}\end{aligned}\tag{2.10}$$

La divido tutta per a_0^2 e la sviluppo

$$\left(\frac{\dot{a}}{a_0}\right)^2 - \frac{\Lambda c^2}{3}\left(\frac{a}{a_0}\right)^2 - \frac{8\pi G}{3}\rho\left(\frac{a}{a_0}\right)^2 = -\frac{Kc^2}{a_0^2}$$

La calcolo a t_0 ricordando le definizioni $H_0 = (\dot{a}_0/a_0)$ e $\rho_{crit,0} = 3H_0^2/(8\pi G)$, trovo

$$\begin{aligned}H_0^2 - \frac{\Lambda c^2}{3}\left(\frac{a_0}{a_0}\right)^2 - \frac{8\pi G}{3}\left(\frac{a_0}{a_0}\right)^2\rho_0 &= H_0^2 - \frac{\Lambda c^2}{3} - \frac{\rho_0}{\rho_{crit,0}}H_0^2 = -\frac{Kc^2}{a_0^2} \\ H_0^2\left(1 - \frac{\Lambda c^2}{3H_0^2} - \frac{\rho_0}{\rho_{crit,0}}\right) &= -\frac{Kc^2}{a_0^2}\end{aligned}$$

Definiamo ora

$$\rho_{0,\Lambda} := \frac{\Lambda c^2}{8\pi G}\tag{2.11}$$

contributo alla densità totale oggi dovuto alla costante cosmologica e

$$\Omega_{0,\Lambda} := \frac{\rho_{0,\Lambda}}{\rho_{crit,0}}\tag{2.12}$$

parametro di densità relativo alla costante cosmologica. Con queste possiamo scrivere

$$H_0^2\left(1 - \Omega_{0,\Lambda} - \Omega_0\right) = -\frac{Kc^2}{a_0^2}$$

e, definendo un **Parametro di Densità Totale** $\Omega_{0,TOT} := \sum \Omega_{0,i}$ come somma dei contributi delle varie componenti dell'Universo (quì costante cosmologica e materia), la Seconda Equazione di Friedmann diventa infine

$$H_0^2\left(1 - \Omega_{0,TOT}\right) = -\frac{Kc^2}{a_0^2}\tag{2.13}$$

Da questa equazione deduciamo che, indipendentemente dalla presenza di una costante cosmologica o meno, o di altre componenti alla densità totale dell'Universo, si potrà discriminare tra i diversi valori della curvatura K a seconda che $\Omega_{0,TOT} >= < 1$.

In questo capitolo considereremo una serie di modelli di Universi contenenti forme di materia relativamente semplici.

2.1 Modelli con Fluido Perfetto

Abbiamo visto quindi come i modelli di Friedmann si basino sull'approssimazione di fluido perfetto, che entra nelle equazioni, come visto nella Sezione 1.7, con un tensore energia-impulso del tipo (1.21). L'approssimazione di fluido perfetto è realistica per l'Universo considerato su grande scala. È sufficiente infatti che il libero cammino medio delle particelle componenti il fluido sia molto minore delle scale di interesse fisico per trattare il fluido come perfetto. Questa forma del tensore è inoltre richiesta perchè la teoria sia compatibile con il Principio Cosmologico: non sono permesse pressioni anisotrope. Per dire di più sulle soluzioni cosmologiche è necessario dire di più sulla relazione tra p e ρ , è necessario quindi specificare un'equazione di stato, problema che prima avevamo accantonato.

L'equazione di stato avrà la forma $p = p(\rho)$, in molti casi di interesse fisico si usa assumere la legge generale

$$p = w\rho c^2 \quad (2.14)$$

con w una costante¹ limitata a variare all'interno di un intervallo $0 \leq w < 1$ detto **Intervallo di Zel'dovich**. Il motivo per cui non è considerato il valore $w = 1$ è chiaro se si considera la definizione di velocità del suono

$$c_s = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s^{1/2} = c \sqrt{w} \quad (2.15)$$

,

quindi se avessi $w = 1$ la velocità del suono sarebbe maggiore della velocità della luce e questo ovviamente non è fisicamente ammissibile. D'altro canto se fosse $w < 0$ avrei una velocità del suono immaginaria².

In ogni caso la costante w assumerà valori diversi a seconda della componente della pressione che sto trattando. Consideriamo allora tutta la **materia ordinaria**, dalla relazione generale $p = nK_B T$ assumendo che le particelle siano tutte protoni ho

$$p_M = \frac{\rho_M}{m_p} K_B T = \frac{K_B T}{m_p c^2} \rho_M c^2$$

dove ρ_M è la densità di materia, $K_B T$ l'energia termica media delle particelle e $m_p c^2$ quella della massa a riposo, ma per un gas *ideale* non relativistico $K_B T \ll m_p c^2$ e quindi il contributo alla pressione totale della materia può essere preso

$$p_M \approx 0$$

che è come dire che $w = 0$, in cosmologia una materia di questo tipo è detta **polvere**. È quindi una buona approssimazione prendere la materia non relativistica come trascurabile nel suo contributo alla pressione.

Nel caso invece di un fluido non degenere di particelle ultrarelativistiche all'equilibrio, l'equazione di stato è del tipo

$$p = \frac{1}{3} \rho c^2 \quad (2.16)$$

¹Che, senza venir meno alla proverbiale originalità della comunità dei cosmologi, è solitamente chiamata "costante vuddoppio".

²Esistono comunque delle situazioni fisicamente significative in cui la materia si comporta come un fluido con $w < 0$.

Per esempio questa equazione può descrivere il caso di un gas di fotoni (un campo di radiazione.) Un fluido con un'equazione di stato del tipo (2.16) è solitamente chiamato **fluido radiativo**, nonostante possa descrivere particelle relativistiche di ogni tipo. Per la (2.15) la velocità del suono in un fluido di polvere sarà $c_s = 0$ e per un fluido radiativo $c_s = c/\sqrt{3}$.

Consideriamo w costante nel tempo e diciamo che la materia ordinaria deve avere $w \approx 0$. Prendiamo ora la condizione di adiabaticità (1.25) e sostituiamo la pressione come nella (2.14)

$$\begin{aligned} d(\rho c^2 a^3) &= -p da^3 = -w \rho c^2 da^3 \\ a^3 dp + 3\rho a^2 da &= -3w \rho a^2 da \\ a^3 d\rho &= -da(3a^2 \rho + 3wa^2 \rho) = -3a^2 \rho(1+w) da \\ \frac{d\rho}{\rho} &= -3(1+w) \frac{da}{a} \\ \rho &\propto a^{-3(1+w)} \end{aligned} \quad (2.17)$$

La condizione di adiabaticità ci dice come varia la densità in funzione del parametro di espansione per un valore qualsiasi di w .

Da questa con la (1.6) possiamo trovare le relazioni per le densità di polvere (e materia non relativistica) e radiazione (e materia relativistica, e.g. neutrini) in funzione del redshift

$$\rho_M = \rho_{0,M} \left(\frac{a_0}{a} \right)^3 = \rho_{0,M} (1+z)^3 \quad (2.18)$$

$$\rho_R = \rho_{0,R} \left(\frac{a_0}{a} \right)^4 = \rho_{0,R} (1+z)^4 \quad (2.19)$$

Per quanto riguarda la costante cosmologica, che come vedremo più avanti parametrizza il contributo della materia oscura, si prende $w = -1$ e ciò mi permette di stimare anche il comportamento (contributo) della Λ sul totale:

$$\rho_\Lambda = \rho_{0,\Lambda} \left(\frac{a_0}{a} \right)^0 = \rho_{0,\Lambda} \quad (2.20)$$

Abbiamo trovato come varia il contributo alla densità delle diverse componenti dell'Universo in funzione del redshift, i valori di densità oggi possiamo stimarli e sono

- $\rho_{TOT} \approx \rho_{0,crit} \Rightarrow \Omega_{0,TOT} \approx 1$;
- $\rho_{0,R} = 10^{-34} g/cm^3 \Rightarrow \Omega_{0,R} = 10^{-5}$;
- $\rho_{0,M} = 0.3 \rho_{0,crit} \Rightarrow \Omega_{0,M} = 0.3$;
- $\rho_{0,\Lambda} = 0.7 \rho_{0,crit} \Rightarrow \Omega_{0,\Lambda} \approx 0.7$.

Se plottiamo queste funzioni in un grafico $\rho - z$ possiamo dividere la storia dell'Universo in epoche definite dal termine che prevale sugli altri (Figura 2.1).

Di conseguenza potremo semplificare le nostre equazioni considerando solamente il termine prevalente sugli altri, a seconda dell'epoca che stiamo analizzando.

Il passaggio da un regime ad un altro è definito da dei valori del redshift di equivalenza tra il contributo di due componenti.

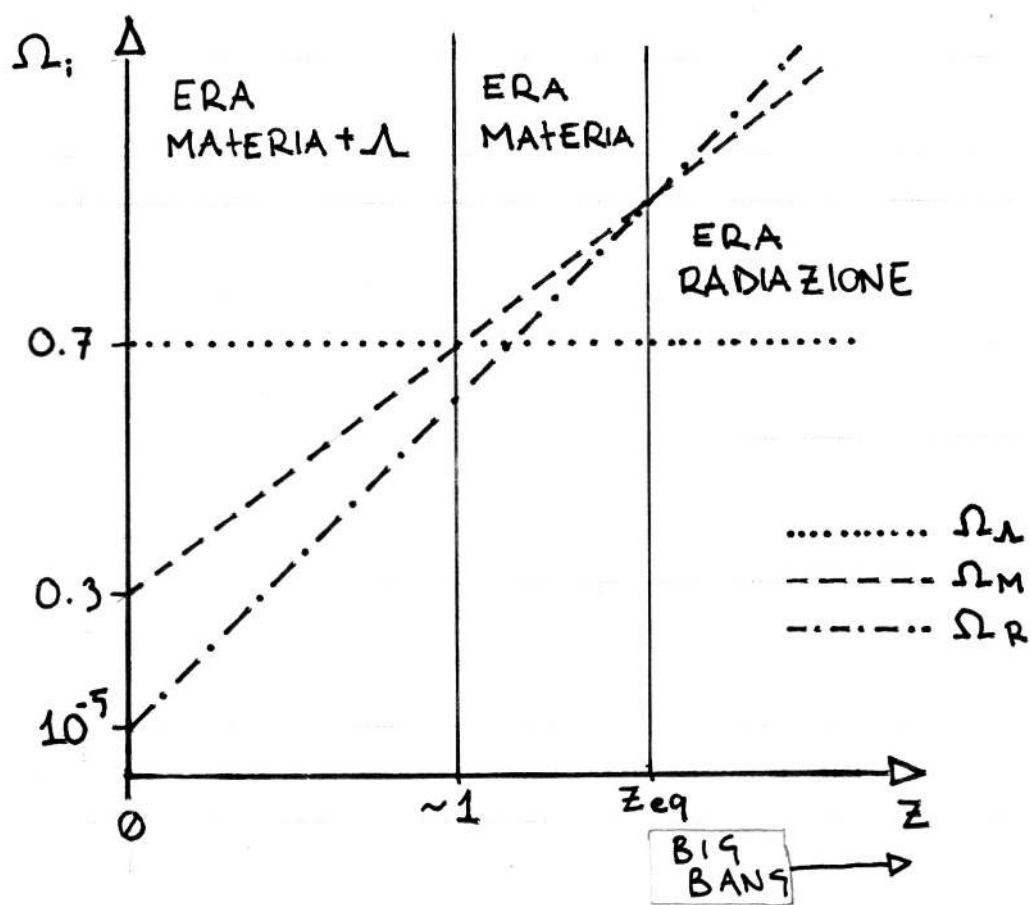


Figura 2.1: Principali ere cosmologiche e andamenti dei parametri di densità delle diverse componenti dell'Universo.

Equivalenza materia-radiazione: la trovo eguagliando ρ_M (2.18) con ρ_R (2.19)

$$\begin{aligned}\rho_{0,M}(1+z_{eq})^3 &\equiv \rho_{0,R}(1+z_{eq})^4 \Rightarrow \\ 1+z_{eq} &= \frac{\rho_{0,M}}{\rho_{0,R}} \approx 10^4 \Rightarrow z_{eq} \approx 10^4\end{aligned}\quad (2.21)$$

Equivalenza materia- Λ : eguaglio ρ_M (2.18) con ρ_Λ (2.20)

$$\begin{aligned}\rho_{0,\Lambda} &\equiv \rho_{0,M}(1+z_{eq})^3 \Rightarrow \\ 1+z_{eq} &= \left(\frac{\rho_{0,\Lambda}}{\rho_{0,M}}\right)^{1/3} \approx 1.7 \Rightarrow z_{eq} \approx 0.7\end{aligned}\quad (2.22)$$

2.1.1 Inevitabilità del Big-Bang in un Universo di Friedmann

Riarrangiamo la Seconda Equazione di Friedmann per poterla esprimere in funzione di Ω , valore più descrittivo della composizione dell'Universo.

$$\dot{a}^2 - \frac{8\pi G}{3}\rho a^2 = -Kc^2$$

Ne consideriamo l'espressione per t_0 e la dividiamo per a_0^2 ricordando le definizioni di $H_0 = \dot{a}/a$ e $\rho_{0,crit} = 3H_0^2/8\pi G$

$$\left(\frac{\dot{a}_0}{a_0}\right)^2 - \frac{8\pi G}{3}\rho_0\left(\frac{a_0}{a_0}\right)^2 = H_0^2 - \frac{8\pi G}{3}\rho_0 = H_0^2\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_{0,crit}}\right) = -\frac{Kc^2}{a_0^2}$$

Da questa sequenza di uguaglianze possiamo estrarre le due equazioni

$$\begin{aligned}\left(\frac{\dot{a}_0}{a_0}\right)^2 - \frac{8\pi G}{3}\rho_0\left(\frac{a_0}{a_0}\right)^2 &= -\frac{Kc^2}{a_0^2} \\ -\frac{Kc^2}{a_0^2} &= H_0^2\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_{0,crit}}\right)\end{aligned}$$

che combiniamo nella

$$\left(\frac{\dot{a}_0}{a_0}\right)^2 = H_0^2\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_{0,crit}}\right) + \frac{\rho_0\left(\frac{a_0}{a}\right)^{3(1+w)}}{\rho_{0,crit}} \frac{a^2}{a_0^2} H_0^2$$

dove si è sostituita la densità secondo la (2.17) nella forma

$$\rho = \rho_0\left(\frac{a_0}{a}\right)^{3(1+w)}\quad (2.23)$$

Applichiamo la definizione di Ω_0 e l'equazione sopra diventa

$$\left(\frac{\dot{a}_0}{a_0}\right)^2 = H_0^2\left[1 - \Omega_0 + \Omega_0\left(\frac{a_0}{a}\right)^{1+3w}\right]\quad (2.24)$$

o, equivalentemente,

$$H^2(t) = H_0^2 \left(\frac{a_0}{a} \right)^2 \left[1 - \Omega_0 + \Omega_0 \left(\frac{a_0}{a} \right)^{1+3w} \right] \quad (2.25)$$

L'equazione (2.25) mi dice il valore del parametro di Hubble al variare del tempo nel caso di Universo ad una sola componente. Come già visto per considerare più componenti basta sostituire $\Omega_0 \rightarrow \sum_i \Omega_{w_i}$. La relazione può anche essere data in funzione del redshift, in questo caso la forma più generale è:

$$H^2(z) = H_0^2 (1+z)^2 \left[1 - \sum_i \Omega_{0,w_i} + \sum_i \Omega_{0,w_i} (1+z)^{1+3w_i} \right] \quad (2.26)$$

ogni componente del fluido ha un suo valore del parametro di stato w_i e quindi un suo valore del parametro di densità Ω_{0,w_i} . Si usa scrivere la (2.26) anche $H^2(z) = H_0^2 E^2(z)$, dove ovviamente $E^2(z) = (1+z)^2[\dots]$. Date le componenti di Universo riconosciute oggi la (2.26) scritta in forma estesa è

$$H^2(z) = H_0^2 (1+z)^2 \left[(1 - \Omega_{0,M} - \Omega_{0,R} - \Omega_{0,\Lambda}) + \Omega_{0,M} (1+z) + \Omega_{0,R} (1+z)^2 + \Omega_{0,\Lambda} (1+z)^{-2} \right]$$

dove la quantità $(1 - \Omega_{0,M} - \Omega_{0,R} - \Omega_{0,\Lambda})$ mi dice quanto l'energia totale differisce dal valore 1:

$$\Omega_{0,tot} = \Omega_{0,M} + \Omega_{0,R} + \Omega_{0,\Lambda}$$

$1 - \Omega_{0,tot}$ è una misura della curvatura dell'Universo, con $\Omega_{0,M} \approx 0.3$, $\Omega_{0,R} \approx 10^{-5}$ e $\Omega_{0,\Lambda} \approx 0.7$. A $z = 0$ posso trascurare il contributo della radiazione ma abbiamo già visto che non abbiamo la sicurezza di poter fare altrettanto a z elevati³.

Consideriamo ora invece la Prima Equazione di Friedmann

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi}{3}G \left(\rho + \frac{3p}{c^2} \right) a = -\frac{4\pi}{3}G\rho(1+3w)a$$

dove si è sostituito $p = w\rho c^2$. Dalla definizione di c_s ad entropia costante avevamo però visto che se non la si vuole superiore a c devono valere le relazioni di Zel'dovich, dalle quali però deve necessariamente essere sempre $(1+3w) > 0$ da cui quindi $\ddot{a} < 0$ SEMPRE⁴.

La quantità $\dot{a}$ entra nelle equazioni come un quadrato quindi avrebbe il segno libero ma le osservazioni mi dicono che $H > 0$ cioè l'Universo si espande e quindi deve essere $\dot{a} > 0$ sempre poichè la Prima Equazione di Friedmann ci ha detto che il grafico di $a(t)$ deve avere concavità negativa e non avere flessi. Ma questo significa anche che il grafico dovrà prima o poi intersecare l'asse t e quindi deve esistere un'istante iniziale nel quale è cominciato l'Universo, il Big-Bang (Figura 2.2).

Si noti poi che, poichè $\rho \propto a^{-3(1+w)}$ allora

$$\lim_{a \rightarrow 0} \rho = \infty$$

³Quà c'ho appuntato un "le espressioni trovate sono normalizzate ai valori attuali secondo la teoria attualmente accettata" ma non ho ben capito che significa...

⁴Sarebbe $\ddot{a} < 0 \iff w > -1/3$ ma l'intervallo di Zel'dovich mi dice che $w > 0$ quindi a maggior ragione $\ddot{a} < 0$

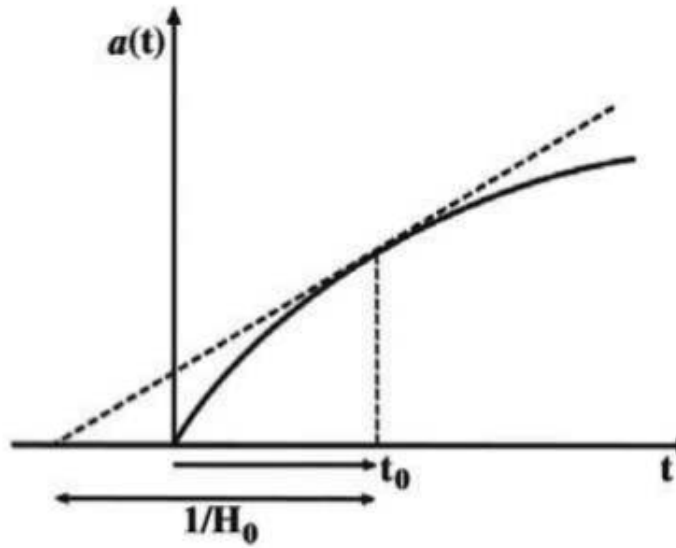


Figura 2.2: Andamento della funzione $a(t)$. La concavità di tale funzione ci dice che se ad un certo istante $\dot{a}(t) > 0$ allora dovrà esserci una singolarità in un tempo (finito) nel passato, ovvero un punto dove $a = 0$. Ci assicura inoltre che l'età dell'Universo, t_0 , deve essere minore del tempo di Hubble, $1/H_0$.

cioè all'istante in cui $a = 0$ (i.e. il raggio dell'Universo è nullo) la densità dell'Universo deve essere infinita e con essa, come vedremo, anche la temperatura.

Il Big-Bang non può essere evitato in un modello di Universo basato sulle Equazioni di Friedmann a meno che non si cambi la definizione di w , ad esempio aggiungendo una costante cosmologica, o senza rifiutare le ipotesi di Friedmann di isotropia ed omogeneità, basate sul Principio Cosmologico. Il Big-Bang va considerato come condizioni iniziali, limiti a $t = 0$. Vedremo più avanti che la nostra indagine non può arrivare al di sotto del tempo di Planck $t_P \sim 10^{-43} \text{sec}$, dove tra l'altro la gravità deve essere quantizzata⁵.

2.2 Universo Piatto

Ci occuperemo ora di trovare delle soluzioni per le Equazioni di Friedmann partendo dal caso più semplice di **Universo Piatto**. Tale modello, preso considerando il fluido ad una sola componente, è detto **Modello di Einstein-de Sitter, EdS**. In un Universo piatto $\Omega_0 = 1$ perciò la (2.24) diventa

$$\left(\frac{\dot{a}}{a_0}\right)^2 = H_0^2 \left[1 - \Omega_0 + \Omega_0 \left(\frac{a_0}{a}\right)^{1+3w} \right] = H_0^2 \left(\frac{a_0}{a}\right)^{1+3w}$$

$$\dot{a} = a_0 H_0 \left(\frac{a_0}{a}\right)^{\frac{1+3w}{2}}$$

da cui quindi $\dot{a}$ dipende solo da a , poichè tutto il resto è costante. Voglio ora integrarla, ho

⁵Più avanti vedremo la teoria più nel dettaglio, ora va considerata semplicemente come un'estrapolazione matematica.

$$\frac{da}{dt} = cost \cdot a^{-\frac{1+3w}{2}} \rightarrow a^{-\frac{1+3w}{2}} da = cost \, dt$$

che integrata da

$$a(t) = a_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{2}{3(1+w)}} \quad (2.27)$$

Per le solite relazioni di Zel'dovich $0 \leq w < 1$ l'espansione non cambia mai andamento e andrà avanti all'infinito. Ricordando la (1.6) $\frac{a_0}{a} = 1 + z$ si può invertire la formula

$$t = t_0(1 + z)^{\frac{2}{3(1+w)}} \quad (2.28)$$

La (2.27) e la (2.28) sono i principali risultati del modello EdS fin qui.

È interessante inoltre calcolare l'andamento di $H(t)$

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} = \frac{[2/3(1+w)]t^{[2/3(1+w)]-1} \cdot cost}{cost \cdot t^{[2/3(1+w)]}} = \frac{2}{3(1+w)} t^{-1} \quad (2.29)$$

Da cui è evidente come H sia una funzione decrescente del tempo, quindi l'espansione rallenta e per $t \rightarrow 0$, cioè avvicinandosi all'istante del Big-Bang, $H \rightarrow \infty$. Invertendo la relazione (2.29) e inserendo il valore della costante di Hubble oggi ho

$$t_0 = \frac{2}{3(1+w)} \frac{1}{H_0}$$

Per il modello EdS la misura di H_0 mi dà direttamente l'età dell'Universo. La cosa non ci stupisce poichè, ricordando il grafico in Figura 2.2, H_0 è una misura della tangente alla curva oggi. Se estrapoliamo linearmente la tangente e ne troviamo l'intersezione con l'asse t ho quindi una stima dell'età. Questa stima è differente dall'età vera dell'Universo, che è minore perchè $H(t)$ è una funzione decrescente del tempo.

L'altro parametro fondamentale visto è il parametro di decelerazione (vedi Sezione 1.4), ci dà una misura adimensionale della derivata seconda, dalla (1.9) con le derivate calcolate in base alla (2.27), abbiamo

$$q(t) = -\frac{\ddot{a}(t)a(t)}{\dot{a}^2(t)} = \frac{1+3w}{2} \propto t \quad (2.30)$$

Cioè in un Universo di EdS l'espansione decelera in maniera costante. La decelerazione è una condizione generale dei modelli derivati dalle Equazioni di Friedmann ma nel caso EdS non ha dipendenza dal tempo.

Troviamo anche

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{a_0}{a} \right)^{3(1+w)}$$

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{-2} \propto \frac{1}{t^2}$$

e poichè la piattezza ($\Omega_0 = 1$) ci fornisce $\rho_0 \equiv \rho_{0,crit}$

$$\rho = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \frac{1}{t^2} \frac{4}{9(1+w)^2} \frac{1}{H_0^2}$$

$$\rho = \frac{1}{6\pi G(1+w)^2} \frac{1}{t^2} \quad (2.31)$$

Queste equazioni sono valide ad alt(issim)o z , quando siamo molto vicini al Big-Bang. Nella Tabella 2.1 un riassunto dei principali risultati generali del modello EdS e le relazioni corrispondenti in due casi di Universo ad una sola componente: il caso di **Universo di pura materia**, $w = 0$, e quello di **Universo di pura radiazione**, $w = 1/3$.

Generale	$w = 0$	$w = 1/3$
$a(t) = a_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{2}{3(1+w)}}$	$a(t) \propto t^{2/3}$	$a(t) \propto t^{1/2}$
$t = t_0(1+z)^{\frac{2}{3(1+w)}}$	$t \propto (1+z)^{-3/2}$	$t \propto (1+z)^{-2}$
$H(t) = \frac{2}{3(1+w)} t^{-1}$	$H(t) = \frac{2}{3t}$	$H(t) = \frac{1}{2t}$
$t_0 = \frac{2}{3(1+w)} \frac{1}{H_0}$	$t_0 = \frac{2}{3H_0}$	$t_0 = \frac{1}{2H_0}$
$q = \frac{1+3w}{2}$	$q = \frac{1}{2}$	$q = \frac{1}{2}$
$\rho = \frac{1}{6\pi G(1+w)^2} \frac{1}{t^2}$	$\rho = \frac{1}{6\pi G} \frac{1}{t^2}$	$\rho = \frac{3}{32\pi G} \frac{1}{t^2}$

Tabella 2.1: *Principali relazioni risultanti dal modello EdS nei 3 casi: generale, pura materia, pura radiazione.*

Una proprietà generale dei modelli EdS è che il parametro di espansione cresce all'infinito con il tempo, con un parametro di decelerazione costante q_0 . Aumentare il valore di w e, quindi, aumentare la pressione causa una crescita del parametro di decelerazione. D'altro canto, paradossalmente, un valore negativo di w , indicante un comportamento simile a quello di una costante cosmologica, corrisponde ad una pressione negativa (tensione) ma non di meno può causare un'espansione accelerata. Notare infine come in questi modelli l'età dell'Universo, t_0 , è strettamente collegata al valore attuale del parametro di Hubble, H_0 .

2.3 Universi Curvi: Proprietà Generali

Continueremo a considerare l'Universo composto da un fluido mono-componente ma in questo caso avremo $\Omega_0 \neq 1$. Prendiamo quindi ancora la (2.24):

$$\left(\frac{\dot{a}}{a_0} \right)^2 = H_0^2 \left[\underbrace{\left(1 - \Omega_0 \right)}_{(1)} + \underbrace{\Omega_0 \left(\frac{a_0}{a} \right)^{1+3w}}_{(2)} \right] \quad (2.32)$$

dove la parte (1) è costante nel tempo e dipende solamente dalla curvatura dell'Universo, la parte (2) varia con $a^{-(1+3w)}$. Esisterà quindi un regime in cui uno dei due termini prevale

sull'altro e viceversa, questo significa che possiamo trovare un valore a^* per cui i due termini sono uguali

$$\begin{aligned} |1 - \Omega_0| &= \Omega_0 \left(\frac{a_0}{a^*} \right)^{1+3w} \\ a^* &= a_0 \left(\frac{|1 - \Omega_0|}{\Omega_0} \right)^{-1/(1+3w)} \end{aligned} \quad (2.33)$$

Quando $a < a^*$ abbiamo

$$\Omega_0 \left(\frac{a_0}{a^*} \right)^{1+3w} \gg 1 - \Omega_0$$

e quindi il termine (2) prevale sul (1) che è trascurabile, da cui

$$\left(\frac{\dot{a}}{a_0} \right)^2 = H_0^2 \Omega_0 \left(\frac{a_0}{a} \right)^{1+3w} \quad (2.34)$$

che differisce dal caso EdS solo per un fattore $H_0 \sqrt{\Omega_0}$. Questo ci dice che anche gli Universi curvi si comportano circa come EdS per $a < a^*$. Le varie relazioni per le grandezze descrittive dell'Universo in esame avranno anche comportamenti simili, abbiamo ad esempio

$$H(t) = H_0 (1 + z)^{\frac{3(1+w)}{2}} \Omega_0 \quad (2.35)$$

$$t = t_0 (1 + z)^{-\frac{3(1+w)}{2}} \Omega_0^{-1/2} \quad (2.36)$$

mentre quelle per ρ e q sono identiche poichè non contengono esplicitamente il parametro H_0 .

Tutto questo mi sta dicendo che l'Universo “si accorge” di essere curvo solo quando $a > a^*$, prima il comportamento è lo stesso di un Universo Piatto (EdS). In altre parole, solitamente è una buona approssimazione ignorare i termini di curvatura quando si studia l'Universo giovane (valida fino a $z = 10$).

Viceversa, a z piccoli, dovrò preoccuparmi del segno di Ω_0 . Distinguiamo tra i due diversi comportamenti.

2.3.1 Universi Aperti

I modelli con $\Omega_w < 1$ sono detti **Modelli Aperti**, il parametro di espansione a cresce indefinitamente con il tempo, come nei modelli EdS.

Dalla (2.32) vediamo che $\dot{a}$ non arriva mai a zero; supponendo che questa variabile sia positiva ad un certo tempo t_0 , la derivata $\dot{a}$ rimane positiva per sempre. Il termine (2) è trascurabile per $a \gg a^*$ e quindi quì vale la

$$\frac{d a}{d t} = \dot{a} = a_0 H_0 (1 - \Omega_0)^{1/2} = \text{cost} \quad (!!!)$$

Questo significa quindi che $a \propto t$, cioè la crescita di a in un Universo aperto è lineare nel tempo. Abbiamo inoltre

$$H = \frac{\dot{a}}{a} \propto \frac{1}{t}$$

$$q = -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} \rightarrow 0 \quad (\text{asintoticamente})$$

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{a_0}{a} \right)^{3(1+z)} \propto \rho_{0,crit} \Omega_0 \left(\frac{t_0}{t} \right)^{3(1+w)}$$

L'espansione è libera e non decelerata (cosa che sapevamo anche da $a \propto t$).

2.3.2 Universi Chiusi

I modelli con $\Omega_w > 1$ sono detti **Modelli Chiusi**. In questo caso esiste un tempo t_m al quale la derivata prima $\dot{a}$ è zero. Dalla solita (2.32) con $\dot{a} = 0$ trovo il valore di a per il quale la derivata si annulla, cioè il valore massimo della funzione $a(t)$

$$\begin{aligned} \left(1 - \Omega_0\right) + \Omega_0 \left(\frac{a_0}{a_{max}}\right)^{1+3w} &= 0 \\ \frac{\Omega_0}{\Omega_0 - 1} \left(\frac{a_0}{a_{max}}\right)^{1+3w} &= 1 \\ a_{max} &= a_0 \left(\frac{\Omega_0}{\Omega_0 - 1}\right)^{1/(1+3w)} \end{aligned} \quad (2.37)$$

A tale raggio massimo dell'Universo corrisponderà una densità minima (osvaldo?!)

$$\rho_{min} = \rho(a_{max}) = \rho_0 \left(\frac{a_0}{a_{max}}\right)^{3(1+w)} = \rho_0 \left(\frac{\Omega_0 - 1}{\Omega_0}\right)^{\frac{3(1+w)}{1+3w}} \quad (2.38)$$

Ma poiché l'equazione (2.32) è quadratica dopo il massimo la curva sarà simmetrica decrescente. Dunque un modello chiuso prevede una seconda singolarità con l'Universo che si richiude su se stesso in un fenomeno denominato **Big-Crunch**. Da notare infine che in un modello chiuso non è proibito supporre un Universo che pulsa tra Big-Bang e Big-Crunch consecutivi (e magari anche passati).

In Figura 2.3 abbiamo il comportamento della funzione $a(t)$ per i tre diversi casi presi in considerazione: Universo piatto, aperto e chiuso.

2.4 Universi di Polvere

L'unico caso in cui le Equazioni di Friedmann sono risolvibili analiticamente (in forma parametrica⁶) è quello di **Universi di pura materia**, anche detti **Universi di polvere** poichè si considera materia con costante $w = 0$ e quindi pressione $p = 0$. Avremo

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{a_0}{a}\right)^{3(1+w)} = \rho_0 \left(\frac{a_0}{a}\right)^3$$

poniamo quindi $c = 1$ nella Seconda Equazione di Friedmann per semplificare i calcoli e sostituiamo la parte costante con $A := \frac{8\pi G}{3} \rho_0 a_0^3$

⁶Avremo soluzioni del tipo: $y = f(y') \quad p := y' \quad y' = \frac{df}{dp} p' \quad p = \frac{df}{dp} p' \quad \frac{dx}{dp} = \frac{1}{p} \frac{df}{dp}$

$$\begin{cases} \int \frac{1}{p} \frac{df}{dp} dp \\ y = f(p) \end{cases}$$

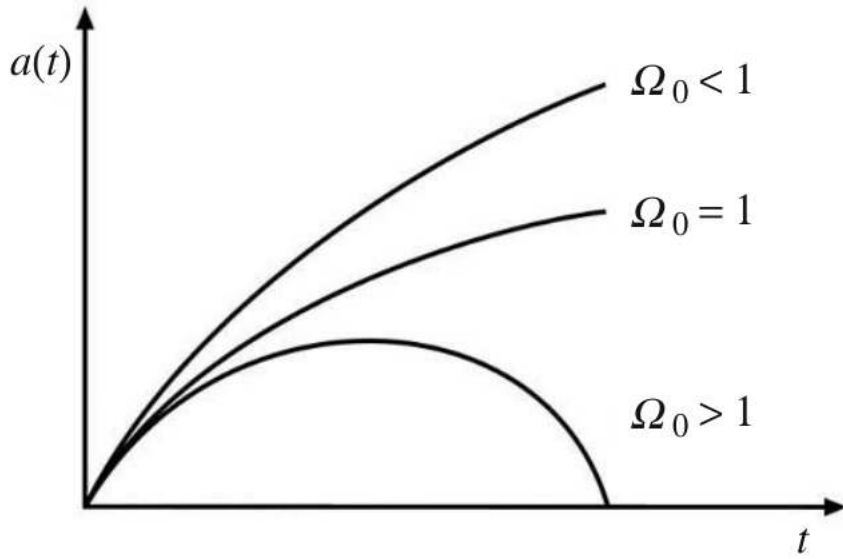


Figura 2.3: *Evoluzione del parametro di espansione $a(t)$ nei tre diversi casi studiati: $\Omega_0 < 1$ modello aperto, $\Omega_0 = 1$ modello piatto (EdS), $\Omega_0 > 1$ modello chiuso.*

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 &= \frac{8\pi}{3}G\rho - \frac{Kc^2}{a^2} = \frac{8\pi}{3}G\rho_0\left(\frac{a_0}{a}\right)^3 - \frac{K}{a^2} \\
 \dot{a}^2 &= \frac{8\pi}{3}G\rho_0\frac{a_0^3}{a^3} - \frac{K}{a^2}a^2 \\
 \dot{a}^2 &= Aa^{-1} - K
 \end{aligned} \tag{2.39}$$

Parametrizziamo ora la (2.39) ponendo $p := \dot{a}$ e risolviamo per a

$$a = \frac{A}{K + p^2}$$

Questa la deriviamo rispetto a p

$$\dot{a} \equiv p = -\frac{2A\dot{p}p}{(K + p^2)^2}$$

dove $\dot{p} = \frac{dp}{dt}$ e dunque

$$\frac{dp}{dt} \left(-\frac{2A}{(K + p^2)^2} \right) = 1$$

da cui otteniamo il sistema parametrico risolutivo

$$\begin{cases} t = -2A \int \frac{dp}{(K + p^2)^2} \\ a = \frac{A}{K + p^2} \end{cases} \tag{2.40}$$

Useremo questo sistema per trovare le soluzioni per diversi casi di Universo curvo.

2.4.1 Universi Chiusi

Consideriamo il caso di un Universo curvo e chiuso (sferico?). Prendiamo il parametro di curvatura $K = 1$, da cui

$$\begin{cases} t = -2A \int \frac{dp}{(1+p^2)^2} \\ a = \frac{A}{1+p^2} \end{cases} \quad (2.41)$$

È conveniente utilizzare le coordinate sferiche e porre $p = \tan \theta$ da cui

$$dp = \frac{d\theta}{\cos^2 \theta}; \quad 1 + p^2 = 1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

Sostituendo quindi nella prima equazione del sistema (2.41) abbiamo

$$\begin{aligned} t &= -2A \int \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} \cos^4 \theta = -2A \int d\theta \cos^2 \theta = \\ &= -A(\theta + \sin \theta \cos \theta) + cost = -\frac{A}{2}(2\theta + \sin 2\theta) + cost \end{aligned}$$

e poniamo $2\theta = \pi - \alpha$, per cui $p = \tan(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2})$, e la relazione sopra diventa

$$t = -\frac{A}{2}[\pi - \alpha + \sin(\pi - \alpha)] = \frac{A}{2}(\alpha - \sin \alpha)$$

La seconda equazione del sistema (2.41) invece

$$a = \frac{A}{1 + \tan^2 \theta} = \frac{A}{1 + \tan^2(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2})} = A \cos^2(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2})$$

ricordando l'identità $\cos^2 x = \frac{1}{2}(\cos(2x) + 1)$,

$$a = \frac{A}{2}[\cos(\pi - \alpha) + 1] = \frac{A}{2}(1 - \cos \alpha)$$

Il sistema parametrico di equazioni risolutive per un Universo di polvere chiuso è quindi

$$\begin{cases} t = \frac{A}{2}(\alpha - \sin \alpha) \\ a = \frac{A}{2}(1 - \cos \alpha) \end{cases} \quad (2.42)$$

Questa scrittura non ci soddisfa poichè non ci dice molto. Prendo di nuovo la Seconda Equazione di Friedmann divisa per a_0^2 con $K = 1$ e $c = 1$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\dot{a}}{a_0}\right)^2 - \frac{8\pi G}{3}\rho\left(\frac{a}{a_0}\right)^2 &= H_0^2 - \frac{Kc^2}{a_0^2} = -\frac{Kc^2}{a_0^2} = 1 \\ \Rightarrow a_0^2 H_0^2 &= \frac{1}{\Omega_0 - 1} \end{aligned} \quad (2.43)$$

Riscrivo le equazioni del sistema (2.42) (esplicitando la costante A ed usando la (2.43)):

$$a = \frac{1}{2}\left(\frac{8\pi G}{3}\rho_0 a_0^3\right)(1 - \cos \alpha) = \frac{a_0}{2}(\Omega_0 H_0^2 a_0^2)(1 - \cos \alpha) = \frac{a_0}{2}\left(\frac{\Omega_0}{\Omega_0 - 1}\right)(1 - \cos \alpha)$$

$$t = \frac{1}{2} \frac{8\pi G}{3} \rho_0 a_0^3 \frac{H_0^3}{H_0^3} (\alpha - \sin \alpha) = \frac{1}{2H_0} \frac{\Omega_0}{(\Omega_0 - 1)^{3/2}} (\alpha - \sin \alpha)$$

ovvero

$$\begin{cases} a = \frac{a_0}{2} \left(\frac{\Omega_0}{\Omega_0 - 1} \right) (1 - \cos \alpha) \\ t = \frac{1}{2H_0} \frac{\Omega_0}{(\Omega_0 - 1)^{3/2}} (\alpha - \sin \alpha) \end{cases} \quad (2.44)$$

Notiamo innanzitutto che $\dot{a} > 0$, ovvero $a(t)$ è una funzione crescente, quando $0 < \alpha \leq \pi$; è, viceversa, decrescente quando $\pi < \alpha \leq 2\pi$. $a(t)$ ammette un massimo $a_{max} = a_0 \frac{\Omega_0}{\Omega_0 - 1}$ (poichè cambia andamento, ovvero cambia il segno di $\dot{a}$). Tale massimo viene raggiunto quando $\alpha = \pi$ ovvero a

$$t_{max} = \frac{\pi \Omega_0}{2H_0(\Omega_0 - 1)^{3/2}}$$

Per conoscere l'età dell'Universo dovremo trovare il valore α_0 , cioè il tempo in cui $a = a_0$, condizione che inserisco nella prima del Sistema (2.44)

$$a_0 = \frac{a_0}{2} \left(\frac{\Omega_0}{\Omega_0 - 1} \right) (1 - \cos \alpha_0)$$

risolvendola trovo α_0 che poi sostituisco nella seconda del sistema per trovare

$$t_0 = \frac{1}{2H_0} \frac{\Omega_0}{(\Omega_0 - 1)^{3/2}} \left[\cos^{-1} \left(\frac{2}{\Omega_0} - 1 \right) - \frac{2}{\Omega_0} (\Omega_0 - 1)^{1/2} \right] < \frac{2}{3H_0}$$

Cioè a parità di H_0 , l'età degli Universi curvi positivi è minore di quella degli Universi piatti (per i quali $t_0 = 2/3H_0$). Del resto avendo una quantità maggiore di materia (e quindi un parametro di densità maggiore) l'espansione è frenata.

2.4.2 Universi Aperti

Alla luce di quanto visto non è difficile, seguendo lo stesso ragionamento, trovare la soluzione per Universi curvi negativi (Iperbolici, i.e. Universi Aperti). In questo caso avremo $K = 1$ e $\Omega_0 < 1$, il sistema risultante è

$$\begin{cases} a = \frac{a_0}{2} \left(\frac{\Omega_0}{1 - \Omega_0} \right) (\cosh \Psi - 1) \\ t = \frac{1}{2H_0} \frac{\Omega_0}{(\Omega_0 - 1)^{3/2}} (\alpha - \sin \alpha) \end{cases} \quad (2.45)$$

dal quale la relazione per l'età dell'Universo è data dalla

$$t_0 = \frac{1}{2H_0} \frac{\Omega_0}{(\Omega_0 - 1)^{3/2}} \left[\frac{2}{\Omega_0} (1 - \Omega_0)^{1/2} - \cosh^{-1} \left(\frac{2}{\Omega_0} - 1 \right) \right] > \frac{2}{3H_0}$$

Quindi nel caso di Universi aperti l'età è maggiore (*la materia è di meno..*) rispetto a quella di Universi piatti.

Fissato il valore di H_0 , l'età dell'Universo, rispetto al caso piatto, è maggiore nel caso di Universo iperbolico e minore nel caso sferico. Notare che in queste considerazioni va tenuto

conto del valore che assume Ω_0 caso per caso ($\Omega_0 < 1$ e $K = -1$ per Universo iperbolico e $\Omega_0 > 1$ e $K = 1$ per Universo sferico). Dunque questi visti qui sono il terzo metodo che incontriamo per misurare i parametri cosmologici: abbiamo visto le **candele standard** e i **righe standard**. Si potrebbero usare anche dei **cronometri standard**, ovvero oggetti di età, per una qualche loro proprietà, nota (e.g. se osserviamo una galassia ad un determinato redshift di cui, grazie ad un'indagine accurata di evoluzione stellare, riesco a determinare l'età, saremo in grado di dire che a quel redshift l'Universo deve avere almeno quell'età.).

2.4.3 Caso generale e commenti

Si sono analizzati i casi in cui è possibile risolvere analiticamente le Equazioni di Friedmann. Abbiamo inoltre visto che ad alto redshift (in prossimità del Big-Bang) gli universi curvi si comportano e sono approssimabili ad universi piatti. Viceversa, tale approssimazione smette di essere valida quando il redshift è più piccolo, introducendo il valore a^* come soglia critica di validità. Vogliamo ora scrivere le equazioni nella forma più generale possibile, lasciandole in forma di integrale se necessario. In un Universo composto da un fluido di sola materia l'età dipende solo da H_0 e da Ω_0 (nel caso piatto $\Omega_0 = 1$ quindi non ci crea grandi problemi). Se fisso H_0 ho che $t_{0,S} < t_{0,P}$ e $t_{0,H} < t_{0,P}$ ⁷, cioè ho che se Ω_0 cresce l'età dell'Universo diminuisce mentre se Ω_0 decresce l'età dell'Universo è maggiore. Il problema è che noi sappiamo che l'ipotesi di un'unica componente non è verosimile in quanto le osservazioni attestano che il nostro Universo è composto da almeno due componenti, cioè la materia ($0.25 \div 0.3 \Omega_{tot}$) e l'energia oscura ($0.7 \div 0.75 \Omega_{tot}$). Da aggiungere c'è anche la radiazione, che sebbene oggi sia trascurabile, abbiamo visto che è esistita un'epoca nella storia dell'Universo in cui questa era predominante.

Riportiamo ora la (2.26) nelle sue due forme equivalenti

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H_0^2 \left[\left(1 - \sum_i \Omega_{0,w_i}\right) - \sum_i \Omega_{0,w_i} \left(\frac{a_0}{a}\right)^{1+3w_i} \right] \quad (2.46)$$

$$H^2(z) = H_0^2 (1+z)^2 \left[1 - \sum_i \Omega_{0,w_i} + \sum_i \Omega_{0,w_i} (1+z)^{1+3w_i} \right] = H_0^2 E^2(z) \quad (2.47)$$

E il legame che lega il redshift al tasso di espansione dell'Universo:

$$1+z = \frac{a_0}{a(t)} \quad (2.48)$$

Abbiamo poi definito la funzione $F(r)$ (Sezione 1.2), parte spaziale della metrica FRW scritta in coordinate polari.

$$F(r) = \int_0^r \frac{dr'}{\sqrt{1 - Kr'^2}} \quad (2.49)$$

Per un fotone, che si muove sempre su geodetiche $ds^2 = 0$, la parte spaziale della metrica è uguale all'opposto della parte temporale, quindi vale la

$$\int_0^r \frac{dr'}{\sqrt{1 - Kr'^2}} = \int_t^{t_0} \frac{c dt'}{a(t')}$$

⁷s = sferico, p = piatto, h = iperbolico.

Vogliamo fare un cambio di variabili a secondo membro. Consideriamo la Seconda Equazione di Friedmann nella forma (2.46) e ne estraiamo la radice

$$\frac{\dot{a}}{a_0} = H_0 \left[\left(1 - \sum_i \Omega_{0,w_i}\right) - \sum_i \Omega_{0,w_i} \left(\frac{a_0}{a}\right)^{1+3w_i} \right]^{1/2}$$

poiché

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{a(t)}{a_0} \right) = \frac{\dot{a}}{a_0} = \frac{da}{dt} \frac{1}{a_0} \quad \rightarrow \quad dt = \frac{da}{H_0 \left[\left(1 - \sum_i \Omega_{0,w_i}\right) - \sum_i \Omega_{0,w_i} \left(\frac{a_0}{a}\right)^{1+3w_i} \right]^{1/2}}$$

,

posso sostituire al secondo membro ed ottengo

$$F(r) = \int_0^r \frac{dr'}{\sqrt{1 - Kr'^2}} = \int_{a(t)}^{a_0} \frac{c da'}{a'(t') H_0 \left[\left(1 - \sum_i \Omega_{0,w_i}\right) - \sum_i \Omega_{0,w_i} \left(\frac{a_0}{a}\right)^{1+3w_i} \right]^{1/2}} \quad (2.50)$$

.

L'equazione (2.50) è la forma più generale possibile tra tutte le equazioni per trovare la coordinata radiale comovente r di una sorgente osservata, o meglio, la parte spaziale della metrica usata⁸. Lega la metrica FRW alle Equazioni di Friedmann e ai parametri cosmologici, quindi al modello di Universo preso in esame.

Nel caso di universi di pura materia⁹ ($w = 0$) l'integrale è risolvibile: effettuiamo innanzitutto un'ulteriore sostituzione di variabile ponendo $x = \frac{a}{a_0} = (1 + z)^{-1}$ (dalla (2.48)), la (2.50) diventa

$$F(r) = \frac{c a_0}{a_0 H_0} \int_{\frac{1}{1+z}}^1 \left(\frac{\Omega_0}{x} + 1 - \Omega_0 \right)^{-1/2}$$

da cui otteniamo

$$r = \frac{2c}{H_0 a_0} \frac{\Omega_0 z + (\Omega_0 - 2)[(\Omega_0 z + 1)^{1/2} - 1]}{\Omega_0^2(1 + z)} \quad (2.51)$$

è la cosiddetta **formula di Matting**, con la quale possiamo ad esempio trovare i valori di distanza in luminosità e distanza angolare applicando la (1.14) e la (1.16).

Consideriamo ora il legame che c'è tra fattore di espansione e redshift:

$$\frac{\dot{a}}{a_0} = \frac{d}{dt} \left(\frac{a}{a_0} \right) = \frac{d(1+z)}{dt} = -\frac{1}{(1+z)^2} \frac{dz}{dt}$$

ma per la Seconda Equazione di Friedmann scritta nella forma (2.47) abbiamo che

$$H^2(z) = \left(\frac{\dot{a}}{a_0} \right)^2 = \left(\frac{H_0 E(z)}{(1+z)} \right)^2$$

quindi

⁸Abbiamo visto l'importanza di poter trovare tale espressione nel primo capitolo nella Sezione 1.1

⁹Il periodo in cui la componente di materia domina nel nostro Universo va da 10^4 yr dopo il Big-Bang ad oggi, è la maggior parte della storia dell'Universo. È una buona assunzione per studiare l'evoluzione globale in questo nel caso in esame.

$$\frac{H_0 E(z)}{(1+z)} = -\frac{1}{(1+z)^2} \frac{dz}{dt}$$

$$dt = -\frac{1}{H_0 E(z)} \frac{1}{1+z} dz$$

che integrando da

$$t(z) = \int_z^{+\infty} \frac{1}{H_0 E(z)} \frac{1}{1+z} dz$$

da cui si vede che l'“orologio dell'Universo” dipende direttamente dalla costante di Hubble calcolata oggi e dal modello cosmologico (dipendenza contenuta in $E(z)$). Calcolandola a $z = 0$ otteniamo:

$$t_0 = \frac{1}{H_0} \int_0^{\infty} \frac{1}{E(z)} \frac{1}{(1+z')} dz' \quad (2.52)$$

Si definisce **LookBack Time** la distanza temporale di un qualsiasi evento rispetto a noi, osservatori sulla Terra a $z = 0$, e si esprime come

$$t_{LB}(z) := t_0 - t(z) \quad (2.53)$$

Rappresenta il tempo trascorso dall'emissione di un segnale che arriva ora, a t_0 , con un redshift di z . Il valore di $t(z)$ dipenderà dal modello cosmologico ma, poichè abbiamo visto che più ci si avvicina al Big-Bang più i modelli tendono ad un Universo di tipo EdS, potremo scrivere

$$t(z) = \frac{1}{H_0} \int_z^{\infty} (1+z)^2 (\Omega_0 z)^{-1/2} dz \approx \frac{2 z^{-3/2}}{3 H_0 \Omega_0^{1/2}} \quad (2.54)$$

Questa formula sarà valida esclusivamente per i primi istanti di vita dell'Universo, sotto le assunzioni $1+z \approx z$ e $\Omega_0 \approx 1$.

2.5 Evoluzione del Parametro di Densità

Fino a quì si è utilizzata in molte equazioni di questo capitolo, la quantità Ω_{0,w_i} , o nel caso speciale della polvere anche Ω_0 , valore per $w = 0$. Questo è perchè si è scelto di parametrizzare le equazioni rispetto al valore di Ω a $t = t_0$. Nonostante questo, è molto importante tenere a mente che il parametro di densità è una funzione del tempo in ognuno di questi modelli

$$\Omega_{w_i}(z) = \frac{\rho(z)}{\rho_{crit}(z)}$$

Abbiamo inoltre visto che

$$\rho(z) = \rho_0 (1+z)^{3(1+w)}$$

e che la densità critica può essere scritta

$$\rho_{crit}(z) := \frac{3H^2(z)}{8\pi G} = \frac{3H_0^2 E^2(z)}{8\pi G}$$

con

$$H(z) = H_0^2 E^2(z) = H_0^2 (1+z)^2 [1 - \Omega_0 + \Omega_0(1+z)^{1+3w}]$$

E dunque, per un Universo ad un'unica componente¹⁰, combinando le equazioni sopra avremo

$$\begin{aligned} \Omega(z) &= \frac{\rho_0(1+z)^{3(1+w)} 8\pi G}{3H_0^2(1+z)^2 [1 - \Omega_0 + \Omega_0(1+z)^{1+3w}]} \\ \Omega(z) &= \frac{\Omega_0(1+z)^{1+3w}}{1 - \Omega_0 + \Omega_0(1+z)^{1+3w}} \end{aligned} \quad (2.55)$$

Per averla in forma più ordinata la possiamo invertire:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Omega(z)} &= \frac{1 - \Omega_0}{\Omega_0(1+z)^{1+3w} + 1} \\ \Omega_w^{-1}(z) - 1 &= \frac{\Omega_0^{-1} - 1}{(1+z)^{1+3w}} \end{aligned} \quad (2.56)$$

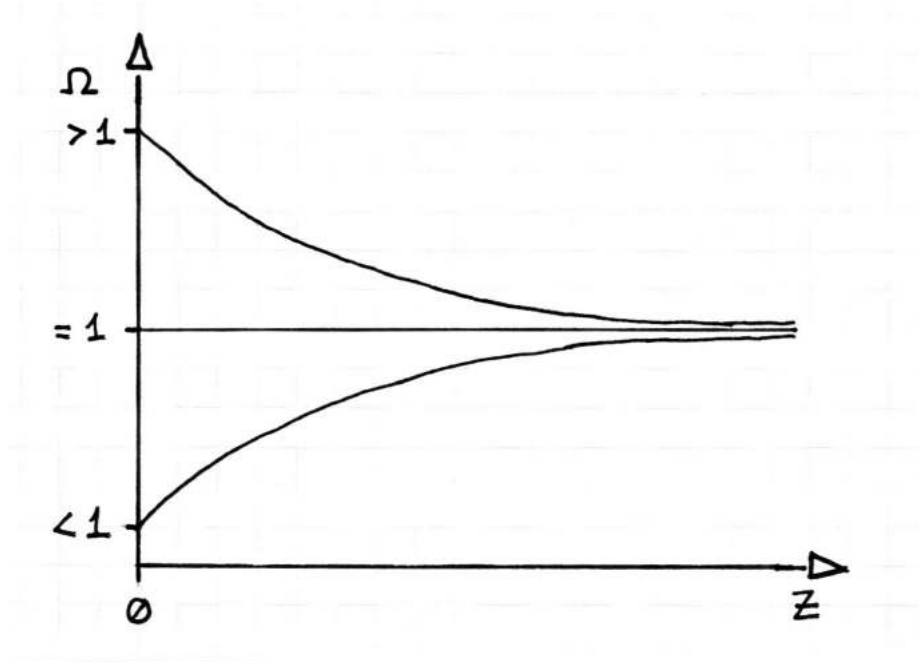


Figura 2.4: Andamento di $\Omega(z)$ nei tre casi di Universo: aperto, piatto e chiuso. Notare come per $z \rightarrow \infty$ i due casi di Universo curvo tendono asintoticamente a quello piatto.

Dal grafico in Figura 2.4 è evidente come, per $z \rightarrow \infty$, i tre possibili andamenti di Ω tendono tutti asintoticamente a quello dell'Universo piatto.

¹⁰Questa assunzione mi serve per non dovermi portare dietro tutti i perdici con i vari w_i e compagnia bella.

Un'osservazione ovvia, ma necessaria, è che, poiché per universi ordinari deve essere $0 \leq w < 1$, l'esponente di $(1+z)$ sarà sempre positivo, e quindi la geometria dell'Universo non può essere cambiata dal Big-Bang ad oggi. Poiché $\Omega_w(z)$ rimane maggiore/uguale/minore di 1 sempre, se un'Universo nasce sferico/piatto/iperbolico tale rimarrà per tutta la sua "vita"¹¹.

2.6 Orizzonte Cosmologico

Si definisce **Orizzonte Cosmologico** tutta la regione di Universo in connessione *causale* con noi, osservatori, cioè lo spazio percorso da tutti i fotoni con età minore o uguale a t_H verso di noi.

Una prima approssimazione per il raggio dell'Orizzonte Cosmologico si ottiene calcolando

$$R_H \approx c\Delta t$$

dove $\Delta t = t_H - t_0$, questo valore però è più piccolo del raggio reale, poichè le regioni connesse causalmente hanno un'estensione più vasta per via dell'espansione dell'Universo. Possiamo darne una definizione più formale usando la

$$R_H(t) := a(t) \int_0^t \frac{c dt'}{a(t')} \quad (2.57)$$

A priori da questa non sappiamo dire cosa succede poiché per $t \rightarrow 0$ abbiamo che $a \rightarrow 0$, e quindi l'integrale potrebbe divergere dandoci un raggio dell'Orizzonte Cosmologico infinito, dobbiamo quindi calcolarlo. Per prima cosa sviluppiamo cambiando variabili

$$R_H(t) := a(t) \int_0^t \dots = a(t) \int_0^{a(t)} \frac{c da'}{\dot{a}' a'(t')}$$

Ricordiamo che

$$\dot{a} = \frac{da}{dt} = a_0 H_0 [1 - \Omega_0 + \Omega_0 (1+z)^{1+3w}]^{1/2} \quad (2.58)$$

dalla quale quindi

$$R_H(t) = \frac{ca(t)}{a_0 H_0} \int_0^{a(t)} \frac{da'}{a'(t') [(1 - \Omega_0) + \Omega_0 (\frac{a_0}{a'(t')})^{1+3w}]^{1/2}}$$

ma per $a \rightarrow 0$ il secondo termine nella quadra al denominatore tende ad annullarsi e quindi posso calcolare l'integrale:

$$R_H(t \sim 0) = \frac{c}{H_0 \Omega_0^{1/2}} \frac{2}{1+3w} \left(\frac{a(t)}{a_0} \right)^{\frac{3(1+w)}{2}} \quad (2.59)$$

Dalla (2.59), poichè quando $t \sim 0$ e quindi $a(t) \rightarrow 0$ il raggio $R_H \rightarrow 0$, risulta evidente che l'**Orizzonte Cosmologico è finito** e cresce nel tempo conseguentemente all'espansione

¹¹Si è semplificato il problema utilizzando le Equazioni di Friedmann per un universo ad una sola componente. Non sarebbe corretto utilizzarle anche per fare considerazioni sul nostro Universo a più componenti ma il risultato è sostanzialmente lo stesso quindi bella lì.

dell'Universo. Questo significa che **ad un certo tempo t_0 riceviamo radiazione solamente da una regione finita di spazio che cresce nel tempo**. Questo risolve, tra le altre cose, il Paradosso di Olbers. Si potrebbe inoltre far vedere che

$$R_H(t \sim 0) \approx 3 \frac{1+w}{1+3w} ct = \begin{cases} 3ct & \text{per } w = 0 \\ 2ct & \text{per } w = 1/3 \end{cases} \quad (2.60)$$

Questa soluzione, esatta in ogni caso in cui $\Omega_w = 1$, ci dice che la regione connessa causalmente è finita e cresce più velocemente di ct per via dell'espansione dell'Universo, $a \propto t^{2/3(1+w)}$. La quantità

$$\tilde{R}_H(t) := c\tau = \frac{c}{H(t)} \quad (2.61)$$

con $\tau := H^{-1}(t)$ tempo tipico di espansione dell'Universo, è detta **Raggio della Sfera di Hubble**, e fornisce lo spazio percorso dalla luce, dalla nascita dell'Universo ad oggi, se l'espansione avvenisse con tasso costante. In tutti gli Universi in cui è prevista un'espansione $R_H(t) \neq \tilde{R}_H(t)$ ma si può dimostrare che più ci si avvicina al Big-Bang più i due raggi sono simili, infatti, poiché vale EdS ($\Omega_0 = 1$)

$$\begin{aligned} H(t) &:= \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} = H_0(1+z)^{3(1+w)/2} = \frac{2}{3(1+w)t} \\ \Rightarrow \tilde{R}_H(t) &= \frac{3(1+w)ct}{2} = \frac{1+3w}{2} R_H(t) \end{aligned}$$

Ma dato che vicino al Big-Bang abbiamo visto prevalere sulle altre componenti la radiazione, per la quale $w = 1/3$, allora $\tilde{R}_H(t \sim 0) \approx R_H(t \sim 0)$. La differenza tra le due misure del raggio sta nel fatto che, mentre $R_H(t)$ tiene conto di tutta la storia evolutiva dell'Universo (poiché il fattore di espansione $a(t)$ è dentro un integrale), $\tilde{R}_H(t)$ è una quantità istantanea che tiene conto dell'entità di tale espansione solo nell'istante t in cui viene misurato. Poiché l'espansione varia ($a = a(t)$), la maniera corretta per misurare l'Orizzonte Cosmologico è tramite R_H , ma quando lavoriamo “vicini” al Big-Bang, per quanto visto ora, possiamo assumere le due definizioni come sinonimi.

Altra misura utile, relativa allo spazio occupato dall'Universo è l'**Orizzonte degli Eventi** che in un certo senso è il complementare dell'Orizzonte Cosmologico in quanto sta ad indicare tutta quella parte di Universo che non è ancora entrata in contatto causale con noi.

$$R_E(t) := a(t) \int_t^{t_{max}} \frac{c dt'}{a(t')} \quad (2.62)$$

dove t_{max} è un estremo superiore di integrazione che indica il termine dell'estensione temporale dell'Universo. Per universi aperti o piatti è uguale ad infinito poiché si suppone l'Universo esisterà in eterno, ma nel caso di Universo chiuso un limite superiore esiste, è l'età del Big-Crunch (BC), dunque in tal caso si assumerà $t_{max} = t_{BC}$.

In ogni caso, se l'espansione è eterna e infinita allora l'integrale diverge: $R_E(t) \rightarrow \infty$, prima o poi tutto l'Universo sarà in connessione causale con noi, e di conseguenza con il resto dell'Universo.

2.7 Modelli con Costante Cosmologica

I dati osservativi, in particolare le misure effettuate negli anni '90 sulle distanze e velocità di allontanamento delle supenovae Ia, hanno mostrato che l'Universo sta aumentando la sua velocità di espansione: **espansione accelerata**. Questo non è possibile in un Universo di sola materia e quindi si suppone che esista un'energia, detta **Energia Oscura**, che domina sulle altre componenti e causa l'accelerazione della velocità di espansione. Tale componente viene implementata nei modelli cosmologici per mezzo di una costante cosmologica, una densità di energia costante che riempie omogeneamente lo spazio e fisicamente equivalente all'energia del vuoto.

Consideriamo il parametro di decelerazione (descritto nella Sezione 1.4)

$$q(t) := \frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} = -\frac{\ddot{a}}{a} \left(\frac{a}{\dot{a}} \right)^2 = -\frac{1}{H^2(t)} \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} \quad (2.63)$$

e prendiamo la Prima Equazione di Friedmann

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi}{3}G \left(\rho + \frac{3p}{c^2} \right) a \quad (2.64)$$

Siamo interessati al comportamento vicino all'“oggi”, consideriamo per il momento un Universo fatto esclusivamente di materia: $w = 0$ e $p = 0$, da cui

$$\Omega_M = \frac{\rho_M}{\rho_{crit}} = 8\pi G \frac{\rho_M}{3H^2}$$

$$q = \frac{\Omega_M}{2}$$

che porta a $q > 0$ sempre, e quindi l'Universo deve espandersi in maniera **decelerata**. Questo prova che un Universo di sola materia non è compatibile con l'espansione accelerata osservata.

Inseriamo ora nelle equazioni la costante cosmologica, il cui contributo viene considerato sostituendo nelle equazioni a pressione e densità i valori

$$\begin{cases} \tilde{\rho} = \rho_M + \frac{\Lambda c^2}{8\pi G} \\ \tilde{p} = p_M - \frac{\Lambda c^4}{8\pi G} \end{cases} \quad (2.65)$$

con $p_M \sim 0$ trascurabile.

Sostituisco quindi le (2.65) nella (2.64)

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi}{3}G \left(\rho_M + \frac{\Lambda c^2}{8\pi G} - \frac{3\Lambda c^4}{8\pi G c^2} \right) a = -\frac{4\pi G}{3} \rho_M a + \frac{2\Lambda c^2}{3} a = -\frac{1}{2} \frac{8\pi G}{3} \frac{H^2}{H^2} \rho_M a + \frac{\Lambda c^2}{3} \frac{H^2}{H^2} a$$

$$\ddot{a} = -a H^2 \frac{\Omega_M}{2} + a H^2 \Omega_\Lambda \quad (2.66)$$

dove si è definito

$$\Omega_\Lambda := \frac{\Lambda c^2}{3H^2} \quad (2.67)$$

Ora, per la definizione (2.63), dalla (2.66) ho

$$q = -\frac{\ddot{a}}{aH^2} = \frac{\Omega_M}{2} - \Omega_\Lambda \quad (2.68)$$

Avere un'espansione accelerata significa che deve essere $\ddot{a} > 0$ che è come dire che dobbiamo porre $q < 0$, quindi la condizione per avere espansione accelerata è

$$\Omega_\Lambda > \frac{\Omega_M}{2}$$

I valori attualmente accettati per i due parametri sono $\Omega_M \sim 0.3$ e $\Omega_\Lambda \sim 0.7$, da cui un valore del parametro di decelerazione pari a $q \sim -0.55$.

Abbiamo visto in Figura 2.3 i tre possibili andamenti del fattore di scala con il tempo nel caso di Universo ad una sola componente. Quel grafico non può andare bene anche per l'Universo a più componenti che stiamo introducendo ora con l'aggiunta della costante cosmologica. Ci si chiede che aspetto potrà avere quindi il nuovo grafico. Sappiamo che la derivata seconda del fattore di scala varia poichè da $\ddot{a} < 0$, vicino al Big-Bang dove abbiamo detto gli universi si comportano come EdS, si passa a $\ddot{a} > 0$ oggi. Questo significa che esisterà un tempo in cui $\ddot{a} = 0$ e quindi nel grafico sarà presente un flesso. Vogliamo trovare a che redshift troviamo tale flesso.

Innanzitutto, tra i 3 casi consideriamo quello di Universo piatto poichè $\Omega_{tot} = \Omega_M + \Omega_\Lambda \approx 1$, e lì cerchiamo un z_F (redshift del flesso, epoca in cui l'espansione ha iniziato ad accelerare), per avere il quale deve essere $\ddot{a} = 0$ e quindi $q = 0$, da cui

$$\Omega_\Lambda(z_F) = \frac{\Omega_M(z_F)}{2}$$

Ricordando la definizione del parametro di densità $\Omega := \rho/\rho_{crit}$ e l'equazione di stato $\rho_w = \rho_{0,w}(1+z)^{3(1+w)}$ dove inseriamo $w = -1$ per la costante cosmologica e $w = 0$ per la materia, sviluppiamo

$$\begin{aligned} \rho_{crit}(z_F)\Omega_\Lambda(z_F) &= \frac{\Omega_M(z_F)}{2}\rho_{crit}(z_F) \\ \rho_\Lambda(z_F) &= \frac{\rho_M(z_F)}{2} \\ \rho_{0,\Lambda}(1+z_F)^0 &= \frac{\rho_{0,M}}{2}(1+z_F)^3 \end{aligned}$$

$$z_F = \left(\frac{2\rho_{0,\Lambda}}{\rho_{0,M}}\right)^{1/3} - 1 = \left(\frac{2\Omega_{0,\Lambda}}{\Omega_{0,M}}\right)^{1/3} - 1 \approx \left(\frac{1.4}{0.3}\right)^{1/3} - 1 \approx (4.7)^{1/3} - 1 \approx 0.68$$

Abbiamo quindi trovato il redshift al quale l'effetto della costante cosmologica diventa evidente, ma da qui si origina il **Problema della Coincidenza**, ovvero z_F risulta troppo vicino a noi: troppo antropocentrico¹² vedremo inoltre che il redshift dell'equivalenza materia-costante cosmologica è ancora più recente ($z \approx 0.3$).

Abbiamo già detto che per calibrare la nostra misura delle distanze abbiamo bisogno di candele standardizzabili quando si parla di distanza in luminosità. Ma per calibrare le

¹²E che si fa? Niente, ce lo teniamo così ma badaci!

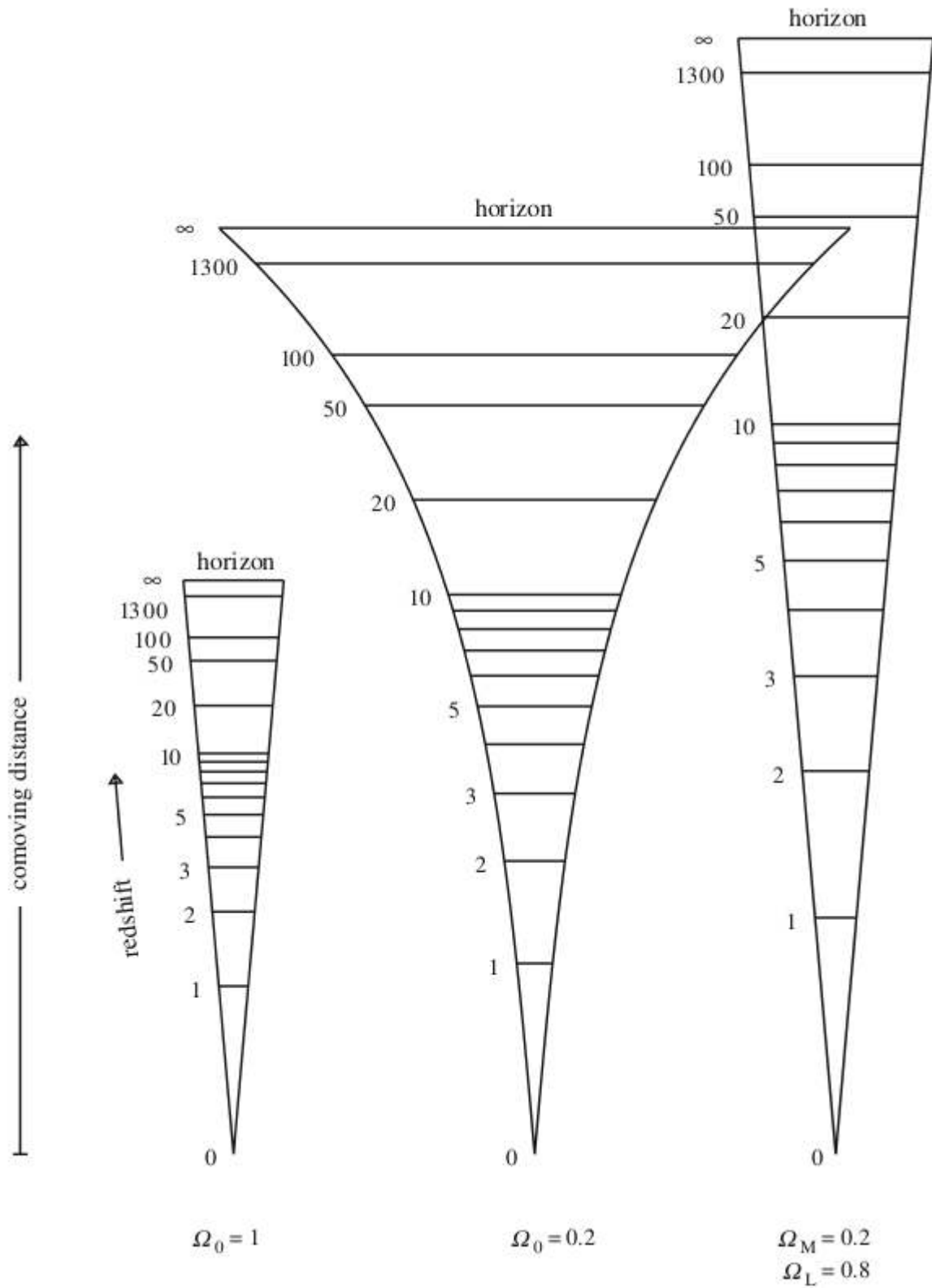


Figura 2.5: Comportamento dei diametri angolari e delle distanze come funzione del redshift per modelli cosmologici con e senza curvatura e termini di costante cosmologica (Hamilton, 1998)

distanze angolari abbiamo bisogno di oggetti estensione angolare fissa (righelli standard). Le dimensioni dell'orizzonte cosmologico al momento dell'emissione della CMB e le dimensioni della distribuzione delle galassie su grande scala sono due di questi righelli standard. Poichè, infatti, ne conosciamo l'estensione reale, misurarne l'estensione angolare ci permette, tra l'altro, di discriminare una possibile geometria dell'Universo dall'altra.

In Figura 2.5 un grafico che aiuta a capire come i diversi modelli influiscono sulle proprietà geometriche di distanza e diametro angolare. Quanto abbiamo visto fino a qui ci sta dicendo che tutte le distanze ed i tempi evolutivi dipendono dalla geometria dell'Universo, in figura ci sono tre esempi che illustrano questo problema. Nel primo a sinistra si considera un Universo piatto di sola materia, la geometria è Euclidea (i triangoli hanno somma degli angoli interni uguale a π), le distanze crescono con il redshift e con esse varia l'angolo sotteso (o meglio, in figura sono le dimensioni reali dell'oggetto osservato che aumentano con il redshift, ad angolo sotteso fissato). Nel secondo esempio abbiamo il caso di Universo aperto con $\Omega_0 = 0.2$, non rappresenta il nostro Universo ma è utile per comprendere che aumentando il redshift le distanze sono maggiori, dilatate, l'angolo sotteso aumenta poichè la geometria è di tipo iperbolico (la somma degli angoli interni dei triangoli è minore di π). I dati a nostra disposizione mostrano però che il nostro Universo si comporta come il terzo caso: l'Universo ha geometria piatta poichè la somma delle componenti da un parametro di densità $\Omega_{tot} = 1$. Quindi abbiamo geometria euclidea (su grande scala) ma con un effetto di costante cosmologica che aumenta le distanze degli oggetti (c'è un termine aggiuntivo nelle equazioni per il redshift che ne incrementa il valore).

Abbiamo quindi a disposizione 3 metodi per discriminare la geometria dell'Universo

- calcolando le distanze ad un certo redshift, si possono utilizzare sia la distanza in diametro angolare che quella in luminosità;
- misurando gli angoli: triangoli euclidei per un Universo a geometria piatta, somma degli angoli interni maggiore o minore di π per geometria rispettivamente sferica o iperbolica;
- misurando il tempo se si hanno a disposizione dei cronometri.

Tutte queste relazioni sono “nascoste” dentro al termine $E(z)$ ¹³.

¹³Controllare con appunti un po' perchè non sono sicuro si sia capito chiaramente ho fatto un mix della roba di salvatore, della mia e del coles lucchin forse mi sono perso qualcosa nel mezzo.

Capitolo 3

Storia Termica del Modello del Big-Bang Caldo

“L’Evoluzione Termica dell’Universo è una storia di raffreddamento...”

(Lauro Moscardini, 2014)

Una delle “sicurezze” che abbiamo sul nostro Universo è che tra le sue componenti ci sono materia ($w = 0$) e radiazione ($w = 1/3$). Per quanto riguarda la seconda sappiamo che un campo di radiazione segue la legge di corpo nero, secondo la quale il flusso di energia al secondo è dato dalla legge

$$f = \rho_R c^2 = \sigma T^4 \quad (3.1)$$

dove ρ_R è la **densità di radiazione** e σ la costante di Stefan-Boltzmann. Poichè la CMB è un corpo nero perfetto e sappiamo che $T_{CMB} = 2.726K$, possiamo trovare $\rho_{R,CMB}$ che prendiamo come valore odierno della densità di radiazione

$$\rho_{0,R} = 4.8 \cdot 10^{-34} g/cm^3$$

che corrisponde ad un valore $\Omega_{0,R} \sim 10^{-5}$, perciò il contributo della componente di radiazione al parametro di densità totale è trascurabile.

Per quanto riguarda la materia invece distinguiamo tra **componente di materia barionica** e **componente di materia oscura**. Per calcolarne il contributo della prima, poichè i barioni emettono radiazione, si utilizza la **Funzione di Schechter**

$$\Phi(L) = \frac{\Phi^*}{L^*} \left(\frac{L}{L^*} \right)^{-\alpha} \exp\left(-\frac{L}{L^*}\right) \quad (3.2)$$

che fornisce il numero di stelle o galassie in un determinato intervallo di luminosità (Figura 3.1).

Se integriamo

$$\mathcal{L} = \int_0^\infty \Phi(L) L dL \approx 3 \cdot 10^8 L_\odot / Mpc^{-3}$$

con $L_\odot \approx 10^{33} erg/s$, abbiamo la luminosità media dell’Universo per Mpc^3 . Possiamo ora considerare il rapporto massa-luminosità tipico delle galassie

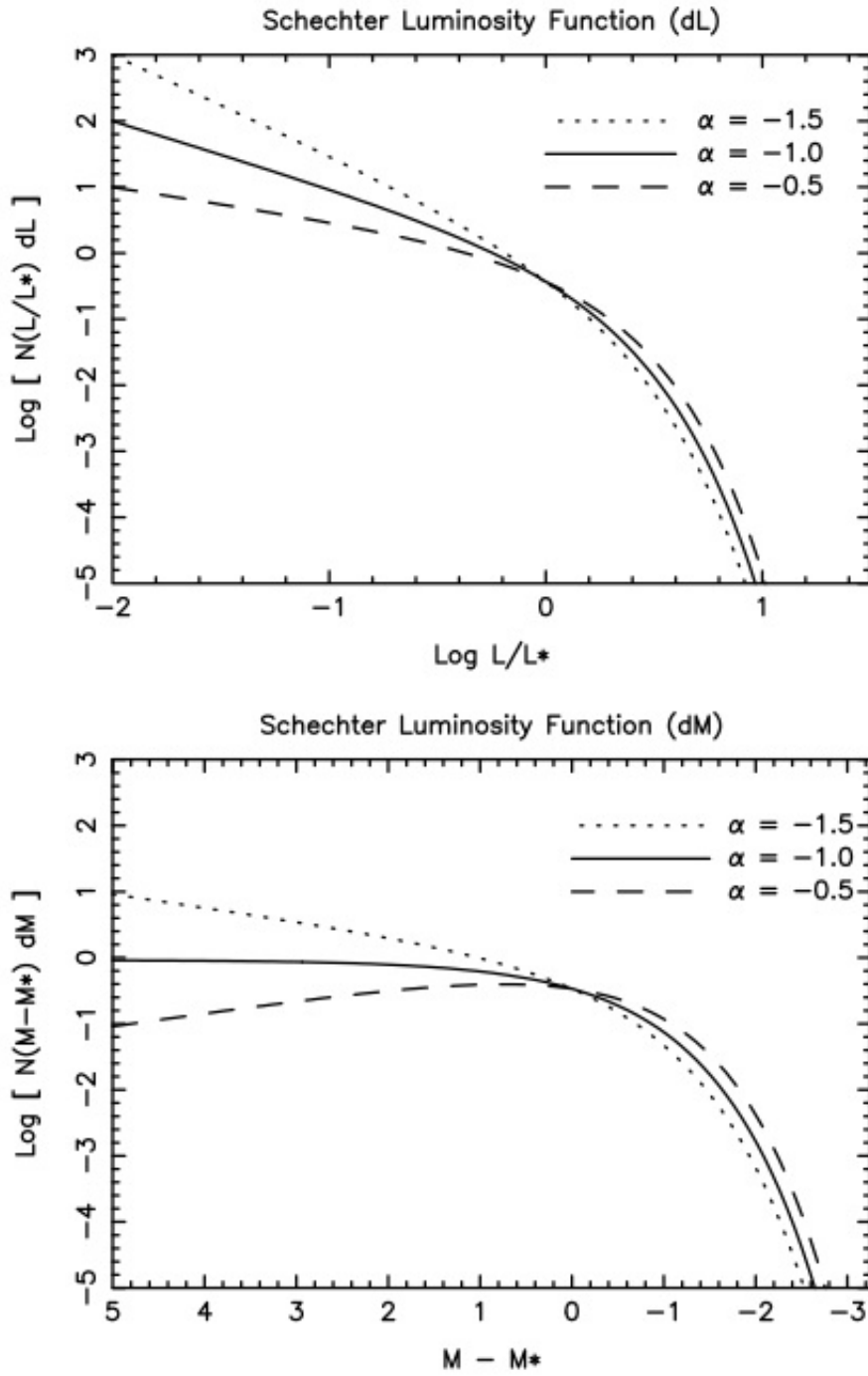


Figura 3.1: *Funzione di Schechter, in luminosità (sopra) e in magnitudine (sotto). Sono presentati 3 possibili andamenti al variare dell'esponente α . Gli assi sono normalizzati per le grandezze scala che compaiono nella formula (Φ^* e L^* o M^*).*

$$\frac{M}{L} \approx 30 h \frac{M_\odot}{L_\odot} \quad (3.3)$$

da cui, moltiplicando per $\mathcal{L}$ trovo una prima stima della densità media della massa barionica contenuta nelle galassie¹:

$$\rho_{gxy} = \mathcal{L} \cdot \frac{M}{L} \approx 10^{-31} g/cm^3 \sim 10^{-2}$$

Abbiamo un primo indizio del fatto che la materia barionica non è la componente principale del nostro Universo, ma le galassie non sono rappresentative del totale, sappiamo infatti che grande parte della massa barionica totale è relegata al gas intergalattico. Altre stime possono essere fatte

- tramite il **Modello della Nucleosintesi Primordiale** (lo vedremo poi?), dal quale risulta che, al fine di rendere il modello compatibile con le abbondanze attuali dei nuclei atomici formati durante il Big-Bang (H , He , Li^7), deve essere $10^{-2} < \Omega_B < 0.025h^{-2}$, con h^{-2} che tiene conto dell'incertezza sulla misura dei volumi derivante dai diversi modelli cosmologici possibili;
- misurando la CMB, radiazione dovuta esclusivamente ai barioni, le misure più recenti sono quelle di Planck che stima $\Omega_B \approx 0.04$.

Il contributo di tutta la materia, compresa quindi anche la componente oscura si stima misurandone gli effetti dinamici gravitazionali, principalmente tramite indagini su **curve di rotazione nelle galassie** e **lensing gravitazionale**. Da questo tipo di studi risulta $\Omega_M \sim 0.3$.

Il valore totale del parametro di densità è ricavabile da prove geometriche dirette (che vedremo più avanti quando affronteremo il problema della CMB), la sonda Planck ha ottenuto recentemente $\Omega_{0,tot} = \sum_i \Omega_{0,i} = 1.02 \pm 0.02$. È quindi immediatamente evidente che al nostro computo manca la maggior parte dei contribuenti². Una prima ipotesi in seno al Modello Standard è quella dei Neutrini ma in questo caso dovrebbero essere particelle non massive con $\rho \sim 0.7\rho_R$ e quindi darebbero un contributo paragonabile a quello della radiazione, di conseguenza trascurabile. Altre teorie affermano che i neutrini potrebbero avere massa ma questo significherebbe che il loro contributo rientra in $\Omega_M \approx 0.3$.

Questo significa che al conteggio manca circa il 70% del totale. Tale contributo si pensa sia dovuto alla **densità di Energia Oscura (DE)** che nei modelli è implementata tramite la costante cosmologica. In realtà la costante cosmologica rappresenta l'**Energia del Vuoto** e nel modello più semplice l'Energia Oscura è vista come tale, quindi le due quantità sono assimilabili. La DE sembrerebbe essere una componente rilevante dell'Universo ma solo da redshift relativamente recenti come abbiamo visto (Problema della Coincidenza).

In Figura 2.1 vediamo gli andamenti delle diverse componenti della densità in funzione del redshift, a sottolineare come ciò che osserviamo oggi è il risultato di un comportamento che è evoluto nel tempo. Distinguiamo tre epoche definite a seconda di quale componente prevale sulle altre. Cerchiamo allora i **redshift di equivalenza**, ovvero il redshift di separazione tra un'epoca e l'altra. Definiamo z_{eq} come il redshift al quale la densità di due componenti si eguaglia

¹moltiplicare per h serve a tenere conto dell'incertezza sul modello cosmologico

²Un po' come in Italia con le tasse (battuta da vecchi).

$$\rho_i(z_{eq,ij}) = \rho_j(z_{eq,ij}) \quad (3.4)$$

dove i e j sono due diverse componenti. Dalla (3.4) risulta, per $i = M$, materia, e $j = R$, radiazione.

$$\frac{\rho_{0,M}}{\rho_{0,crit}}(1 + z_{eq,MR})^3 = \frac{\rho_{0,R}}{\rho_{0,crit}}(1 + z_{eq,MR})^4$$

$$z_{eq,MR} = \frac{\Omega_{0,M}}{\Omega_{0,R}} \approx \frac{0.3}{10^{-5}} \sim 3 \cdot 10^4$$

Sempre dalla Figura 2.1 si vede che in passato il contributo di Λ sul totale è ridicolo e dunque trascurabile.

Nella Sezione 2.7 abbiamo calcolato anche il redshift del flesso, in cui il contributo della costante cosmologica porta alla re-accelerazione dell'espansione³. Possiamo calcolare ora anche il redshift dell'equivalenza tra materia e costante cosmologica

$$z_{eq,M\Lambda} \approx \left(\frac{0.7}{0.3}\right)^{1/3} - 1 \sim 0.3$$

ancora più recente del redshift del flesso! Come conseguenza l'Universo attuale risulta in espansione accelerata con parametro di decelerazione $q \sim -0.55$.

3.1 Disaccoppiamento e Ricombinazione

Una prima domanda che ci poniamo è se le varie componenti dell'Universo siano o meno all'equilibrio termico oggi. Consideriamo il nostro Universo come fosse composto da un gas di solo idrogeno con densità di particelle $n_p \approx \rho_m/m_p$, dove ρ_m è la densità media della materia trovata precedentemente, in tal caso possiamo speculare sull'equilibrio, per quanto riguarda materia e radiazione, facendo un confronto tra tempi scala, il tempo scala tipico collisionale tra particelle e fotoni e il tempo tipico dell'espansione dell'Universo. Il tempo medio tra una collisione e l'altra dipende da n_p , dalla sezione d'urto fotoni-nuclei di idrogeno, σ_c , e dalla velocità delle particelle che urtano, ma essendo coinvolti i fotoni tale velocità sarà sempre quella della luce

$$\tau_{col} \approx \frac{1}{n_p \sigma_c c} \approx \frac{m_p}{\rho_m \sigma_H c} \quad (3.5)$$

Il tempo tipico di espansione dell'Universo è dato in prima approssimazione dal Tempo di Hubble

$$\tau_H = \frac{1}{H} \quad (3.6)$$

Svolgendo i conti risulta che $\tau_{col} \gg \tau_H$ e quindi le collisioni non sono in grado di mantenere l'equilibrio termico tra materia e radiazione, $T_{0,M} \neq T_{0,R}$, le due componenti devono quindi evolvere separatamente: l'Universo non può essere all'equilibrio termico.

³Ricorditi del Problema della Coincidenza!!! RICORDITILO!!!!

Ci occuperemo ora di studiare come evolvono le temperature delle diverse componenti dal Big-Bang ad oggi. Quando materia e radiazione sono disaccoppiate (i.e. non all'equilibrio termico) le loro temperature T_M e T_R evolvono indipendentemente l'una dall'altra (per definizione). Se la componente di gas si espande in maniera adiabatica vale la condizione (1.25)

$$d(\rho c^2 a^3) = -p da^3$$

Se assumiamo un gas di puro idrogeno, la termodinamica classica⁴ ci fornisce

$$d \left[a^3 \left(\rho_M c^2 + \frac{3}{2} K_B T_M \frac{\rho_M}{m_p} \right) \right] = - \frac{\rho_M}{m_p} K_B T_M da^3 \quad (3.7)$$

e poichè $\rho_M \propto (1+z)^3 \propto a^{-3}$ allora $\rho_M a^3 = \text{cost}$ e quindi nel differenziale si annulla. Dalla (3.7) allora abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \frac{K_B}{m_p} d(a^3 \rho_M T_M) &= a^3 \rho_M dT_M = - \frac{\rho_M}{m_p} K_B T_M 3a^2 da \\ \frac{dT_M}{T_M} &= -2 \frac{da}{a} \\ T_M &= T_{0,M} \left(\frac{a_0}{a} \right)^2 = T_{0,M} (1+z)^2 \end{aligned} \quad (3.8)$$

La temperatura della materia cresce come il quadrato del redshift. Questo non deve stupirci poichè dalla termodinamica sappiamo che $TV^{\gamma-1} = \text{cost}$ per espansione adiabatica, da cui quindi $Ta^2 = \text{cost}$ per un gas monoatomico con $\gamma = 5/3$, in un volume $V \rightarrow a^3$.

Per quanto riguarda la temperatura della radiazione o, equivalentemente, di un gas di fotoni, utilizziamo la relazione tra densità di energia e temperatura del corpo nero,

$$\rho_R c^2 = \sigma T_R^4 \quad (3.9)$$

da cui l'equazione di stato diventa $p = \frac{1}{3} \rho_R c^2 = \frac{1}{3} \sigma T_R^4$ e la (1.25) diventa

$$d(\sigma T_R^4 a^3) = - \frac{1}{3} \sigma T_R^4 da^3 \quad (3.10)$$

$$T_R^4 da^3 + a^3 dT_R^4 = - \frac{1}{3} T_R^4 da^3 \quad \rightarrow \quad a^3 dT_R^4 = - \frac{4}{3} T_R^4 da^3$$

$$\frac{dT_R^4}{T_R^4} = - \frac{4}{3} \frac{da^3}{a^3} \quad \rightarrow \quad T_R^4 \propto (a^3)^{-4/3} \propto a^{-4}$$

$$T_R = T_{0,R} \frac{a_0}{a} = T_{0,R} (1+z) \quad (3.11)$$

Dalla (3.8) e dalla (3.11) vediamo che materia e radiazione non hanno la stessa dipendenza da z , seguono piuttosto due adiabatiche diverse⁵.

⁴qu' $nKT \rightarrow \frac{\rho_M}{m_p} K_B T_M$

⁵Fare attenzione perchè al Big-Bang le temperature divergono.

Viene da chiedersi se le due componenti siano mai state all'equilibrio in passato. I due tempi scala visti sopra variano nel tempo. Se la sezione d'urto σ_c che compare nella (3.5) è costante nel tempo allora τ_{coll} scala semplicemente con l'inverso della densità e quindi $\tau_{coll} \propto \rho_M^{-1} \propto (1+z)^{-3}$. Ma poichè, in un Universo EdS

$$\tau_H \propto \begin{cases} (1+z)^{-3/2} & \text{per universo di materia} \\ (1+z)^2 & \text{per universo di radiazione} \end{cases}$$

,

allora esisterà un istante in cui i due tempi sono uguali. Ma questo significa che esiste un redshift oltre il quale le collisioni sono in grado di mantenere l'equilibrio tra materia e radiazione. Questo istante nella storia dell'Universo è detto **Disaccoppiamento**, prima di esso materia e radiazione evolvono dipendentemente l'una dall'altra. Più avanti vedremo la teoria del disaccoppiamento in maniera più dettagliata, per il momento basti sapere che $z_{dec} \sim 1500$. Questo istante della storia dell'Universo verrà indicato con t_d .

Il principale processo con il quale i fotoni interagiscono con la materia in un contesto cosmologico è lo scattering Thomson. Sono ovviamente presenti anche fenomeni di assorbimento, ionizzazione ed emissione ma sono trascurabili rispetto allo scattering Thomson degli elettroni di un plasma completamente ionizzato quale è il fluido cosmologico.

Fintanto che gli scattering avvengono in un tempo scala molto minore del tempo tipico di espansione dell'Universo, esisterà un forte accoppiamento tra materia e radiazione che, avendo continue interazioni, saranno all'equilibrio. Quando, al tempo t_d , la frequenza degli scattering diventa paragonabile al tempo di Hubble, materia e radiazione si disaccoppiano e, per $t \ll t_d$, materia e radiazione evolveranno separate.

Vedremo più avanti che questo processo non è istantaneo ma continua lungo un relativamente ampio intervallo di z (o di t). Prima del disaccoppiamento, a $t \geq t_d$, materia e radiazione sono all'equilibrio tra loro ad una temperatura che varia con il redshift in modo intermedio tra i due andamenti (3.8) e (3.11).

Alle più alte temperature e, di conseguenza, ai redshift più elevati la componente di materia ha un grado di ionizzazione molto elevato, che cala al diminuire di z . Esisterà quindi un istante nel tempo, che chiamiamo t_{rec} , prima del quale la materia è completamente ionizzata, e dopo del quale la ionizzazione è molto piccola. Questa transizione viene chiamata **Ricombinazione**, anche se sarebbe più accurato chiamarla **Combinazione**, poichè è la prima volta nella storia dell'Universo che la materia diventa neutra. Anche la ricombinazione è un processo piuttosto graduale e non avviene solo in un istante $t = t_{rec}$.

È infine da notare che generalmente $t_d \geq t_{rec}$ ma comunque i due tempi saranno molto vicini poichè sono fenomeni collegati, poichè nella ricombinazione varia la sezione d'urto; da sezione d'urto Thomson σ_T si passa alla sezione d'urto dell'idrogeno neutro σ_H (e cambiano quindi i tempi scala delle collisioni).

Ci chiediamo quindi quale sia l'andamento della temperatura prima del disaccoppiamento, ci mettiamo quindi nelle condizioni $t > t_d$ ovvero $z > z_d$. Varrà una condizione di espansione adiabatica che sarà combinazione di tutte le componenti che appaiono nella (3.7) e nella (3.10)

$$d \left[\left(\rho_M c^2 + \frac{3}{2} \frac{\rho_M}{m_p} K_B T + \sigma T^4 \right) a^3 \right] = - \left(\frac{\rho_M}{m_p} K_B T_M + \frac{1}{3} \sigma T_R^4 \right) da^3 \quad (3.12)$$

dove, come prima, il termine $\rho_M c^2$ è costante quindi nel differenziale si annulla. Sviluppiamo la (3.12)

$$\frac{3}{2} \frac{\rho_M}{m_p} K_B a^3 dT + \sigma T^4 da^3 + \sigma a^3 dT^4 = -\frac{\rho_M}{m_p} K_B T_M da^3 - \frac{1}{3} \sigma T_R^4 da^3$$

Introduciamo il parametro adimensionale, il cui significato fisico diventerà evidente a breve

$$\sigma_{rad} := \frac{4m_p \sigma T^3}{3K_B \rho_M} \quad (3.13)$$

dove il σ al numeratore nel secondo membro è la costante di Stefan-Boltzmann, dalla quale le identità

$$\frac{3}{2} \frac{K_B}{m_p} \rho_M = \frac{2\sigma T^3}{\sigma_{rad}} \quad \frac{K_B \rho_M}{m_p} = \frac{4\sigma T^3}{3\sigma_{rad}}$$

che ci permettono di riscrivere l'equazione differenziale sopra

$$\begin{aligned} \frac{2\sigma T^3}{\sigma_{rad}} a^3 dT + \sigma T^4 da^3 + \sigma a^3 dT^4 &= -\frac{4\sigma T^3}{3\sigma_{rad}} T da^3 - \frac{1}{3} \sigma T^4 da^3 \\ dT \left(\frac{2a^3 T^3}{\sigma_{rad}} + 4a^3 T^3 \right) &= -da^3 \left(\frac{4T^3}{3} + \frac{4}{3} T^4 \right) \\ 2a^3 dT \left(\frac{1}{\sigma_{rad}} + 2 \right) &= -\frac{4T}{3} da^3 \left(\frac{1}{\sigma_{rad}} + 1 \right) \\ \frac{dT}{T} \left(\frac{1}{\sigma_{rad}} + 2 \right) &= -\frac{da^3}{a^3} \frac{2}{3} \left(\frac{1}{\sigma_{rad}} + 1 \right) = -\frac{3a^2 da}{a^3} \frac{2}{3} \left(\frac{1}{\sigma_{rad}} + 1 \right) = -2 \frac{da}{a} \left(\frac{1}{\sigma_{rad}} + 1 \right) \\ \frac{dT}{T} &= -\frac{da}{a} \frac{2 + 2\sigma_{rad}}{\sigma_{rad}} \frac{\sigma_{rad}}{1 + 2\sigma_{rad}} \end{aligned}$$

ottenendo, infine, l'equazione differenziale risolutiva per la temperatura in funzione del parametro di espansione a

$$\frac{dT}{T} = -\frac{da}{a} \left(\frac{2 + 2\sigma_{rad}}{1 + 2\sigma_{rad}} \right) \quad (3.14)$$

L'equazione (3.14) non è integrabile poichè $\sigma_{rad} = \sigma_{rad}(T(a))$ e quindi non posso risolverla analiticamente. Quello che posso calcolare è il valore di σ_{rad} oggi che, dopo il disaccoppiamento, non dipende da a . Applicando la definizione (3.13) e assumendo come temperatura quella della radiazione (3.11) e per la densità della materia⁶ $\rho_{0,M} = \Omega_{0,M}/\rho_{0,crit}$

$$\sigma_{rad}(t_0) = \frac{4m_p \sigma T_{0,R}^3}{3K_B \rho_{0,M}} \approx 1.35 \cdot 10^8 (\Omega_{0,M} h^2)^{-1}$$

Il termine che tiene conto delle incertezze sui volumi e sulla densità di materia lo conosciamo (valore attualmente accettato) ed è $(\Omega_{0,M} h^2) \approx 0.15 \cdot 10^{-1}$, da cui risulta

$$\sigma_{rad}(t_0) \approx 10^9$$

⁶ $\rho_M \propto (1+z)^3$

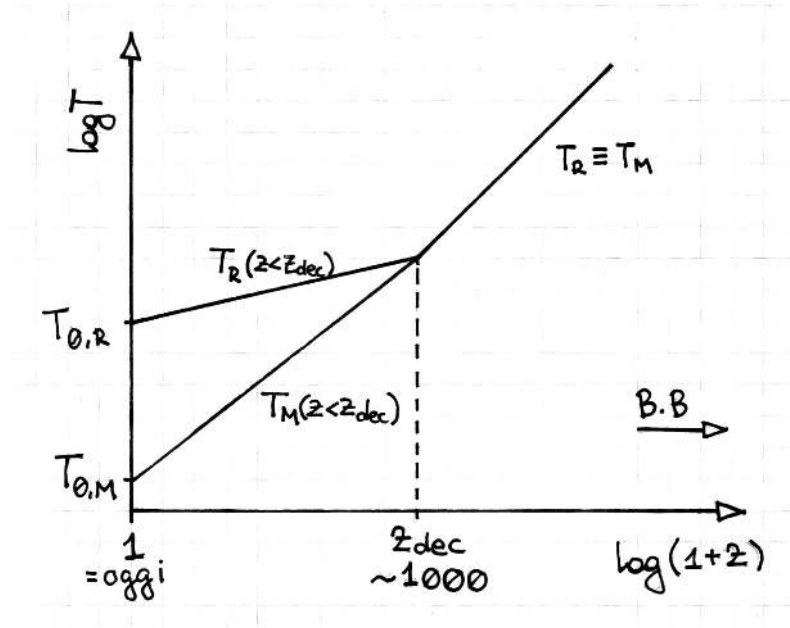


Figura 3.2: Variazione della temperatura con il redshift: dal momento del disaccoppiamento la materia raffredda più rapidamente della radiazione (gli andamenti sono indicativi).

un valore estremamente elevato e questo è di fondamentale importanza. Questo parametro dal momento del disaccoppiamento ad oggi rimane circa costante, prima di t_d la radiazione è gradualmente sempre più accoppiata alla materia. L'equazione (3.14) è valida anche a $t = t_d$ ma poichè $\sigma_{rad}(t) \simeq \sigma_{rad}(t_d) = \sigma_{rad}(t_0) \gg 1$ si può riscrivere

$$\frac{dT}{T} \simeq -\frac{da}{a} \quad (3.15)$$

che, integrando, porta alla (3.11). Questo dimostra che, quando radiazione e materia sono accoppiate, il loro andamento dipende da σ_{rad} ma essendo questo molto grande l'equazione si semplifica e quindi **l'andamento della temperatura è dettato dalla radiazione ed è esattamente lo stesso, anche per la materia**. Non abbiamo quindi un andamento intermedio tra quello della materia e quello della radiazione e questo lo sappiamo grazie al parametro definito σ_{rad} che si mantiene costante da oggi fino al disaccoppiamento. Questa caratteristica è dovuta alle elevatissime temperature che raggiungeva la materia a quell'epoca, rendendola completamente relativistica e dunque indistinguibile dalla radiazione. In Figura 3.2 vediamo l'aumento della temperatura andando indietro nel tempo con il redshift, prima del decoupling materia e radiazione sono accoppiate e si raffreddano con lo stesso andamento, dopo il decoupling la materia si raffredda più velocemente della radiazione.

Vogliamo ora calcolare la temperatura della materia oggi. Abbiamo visto che $T_M(t_d) = T_R(t_d)$ e che a t_d la temperatura va con il redshift seguendo la (3.11), possiamo quindi dire che

$$T_d = T_M(t_d) = T_R(t_d) = T_{0,R}(1 + z_d) \approx 3 \cdot 10^3 K$$

Applicando ora la (3.8) e risolvendola per la temperatura attuale avremo

$$T_{0,M} = T_M(t_d)(1 + z_d)^{-2} = T_d(1 + z_d)^{-2} \approx 3 \cdot 10^{-3}$$

la temperatura della materia oggi è molto bassa.

3.2 Entropia della Radiazione per Barione

Abbiamo appena visto che l'alto valore di σ_{rad} garantisce che la temperatura e la densità della radiazione, in buona approssimazione, evolvono come in un Universo di pura radiazione. Possiamo vedere come la quantità σ_{rad} sia in effetti collegata all'entropia della radiazione per unità di volume,

$$S_R = \frac{dQ}{T} = \frac{\rho_R c^2 + p_R}{T} = \frac{4}{3} \frac{\rho_R c^2}{T} = \frac{4}{3} \sigma T^3 \quad (3.16)$$

dove si è applicata la (3.9). Se prendiamo ora la (3.16) e la dividiamo per la densità numerica di barioni $n_0 = \rho_M/m_p$ e per la costante di Boltzmann otteniamo

$$\frac{S_R}{n_0 K_B} = \frac{4\sigma T^3 m_p}{3K_B \rho_M} \equiv \sigma_{rad} \quad (3.17)$$

Il parametro adimensionale σ_{rad} assume quindi il significato di **entropia della radiazione per barione**, adimensionalizzato tramite la divisione per K_B . Il suo significato fisico è più chiaro se si considera il rapporto tra densità numerica di barioni e fotoni, che definiamo

$$\eta := \frac{n_b}{n_\gamma} \quad (3.18)$$

con $n_\gamma = \frac{\rho_R}{K_B T} = \frac{\sigma T^3}{K_B c^2}$, rapporto tra la densità del gas di fotoni e l'energia di ogni singolo fotone. La (3.18) diventa allora

$$\eta = \frac{\rho_m K_B c^2}{m_p \sigma T^3} = \frac{3.6}{\sigma_{rad}}$$

Il motivo per cui quindi σ_{rad} è così grande è perchè η è molto piccolo, cioè il numero di fotoni sovrasta grandemente quello di barioni. Ma allora ora ci chiediamo il perchè di questa relazione. Perchè due numeri così diversi tra loro? Consideriamo la **capacità termica per unità di volume**⁷ della radiazione $\rho_R C_R$ e della materia $\rho_M C_M$

$$\rho_R C_R = \frac{\partial(\rho_R c^2)}{\partial T} = \frac{\partial(\sigma T^4)}{\partial T} = 4\sigma T^3 \quad \rho_M C_M = \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{3}{2} \frac{\rho_M}{m_p} K_B T \right) = \frac{3}{2} \frac{\rho_M}{m_p} K_B$$

E da queste è immediato vedere che

$$\sigma_{rad} = \frac{\rho_R C_R}{\rho_M C_M}$$

Abbiamo un valore molto grande di σ_{rad} perchè la capacità termica della radiazione è molto superiore a quella dei barioni. Il valore molto elevato di questo rapporto assicura che

⁷Si devinisce **capacità termica** di un corpo (o, più in generale, di un qualunque sistema) il rapporto tra il calore scambiato fra il corpo e l'ambiente e la conseguente variazione di temperatura: $C := \frac{Q}{\Delta T}$. La capacità termica per unità di volume è quindi data dal rapporto tra la variazione infinitesima di energia interna di un sistema per unità di volume e la variazione infinitesima di temperatura: $\rho C = \frac{\partial \epsilon}{\partial T}$

il fluido composto da materia e radiazione accoppiati segue una legge di raffreddamento di pura radiazione in buonissima approssimazione.

Perchè allora la capacità termica della radiazione è molto superiore a quella dei barioni? Siamo arrivati con questa domanda al nocciolo duro della questione. L'esistenza e l'entità del rapporto tra capacità termiche è collegato all'**asimmetria primordiale tra materia ed antimateria**. Indichiamo con n_b ed $n_{\bar{b}}$ le densità numeriche di barioni ed anti-barioni, rispettivamente. Da pochi istanti dopo il Big-Bang il numero totale di barioni ed anti-barioni nell'Universo è rimasto (circa) costante fino ad oggi, vale quindi la

$$(n_b - n_{\bar{b}}) a^3 = (n_{0,b} - n_{0,\bar{b}}) a_0^3$$

con a^3 che è assimilabile al volume dell'Universo. Oggi deve valere $n_{\bar{b}} \approx 0$ poichè altrimenti osserveremmo un fondo di radiazione γ molto più intenso a causa delle più frequenti annichilazioni tra barioni ed antibarioni. Più avanti nel corso vedremo che, nell'epoca successiva a $T_{GUT} \approx 10^{15} GeV$, doveva valere la seguente

$$n_b \approx n_{\bar{b}} \approx n_\gamma \propto T^3$$

dalla quale l'asimmetria tra barioni ed anti-barioni ci aspettiamo sia

$$\frac{n_b - n_{\bar{b}}}{n_b + n_{\bar{b}}} \approx \frac{n_b - n_{\bar{b}}}{2n_\gamma} \approx \frac{n_{0,b}}{2n_\gamma} \approx \sigma_{rad}^{-1}$$

dove nel primo termine abbiamo diviso per $n_b + n_{\bar{b}}$ per adimensionalizzare il rapporto, e dove $n_{0,b}$ è la densità odierna di materia. Questo ci dice che il valore estremamente elevato di σ_{rad} è imputabile all'asimmetria primordiale tra materia ed anti-materia. In particolare ci dice che alla nascita dell'Universo ogni 10^9 anti-barioni c'erano $10^9 + 1$ barioni (la differenza era un milionesimo del totale). Il processo di **annichilazione tra materia ed anti-materia** seguente il Big-Bang ha portato ad avere un milionesimo dei barioni di partenza e ad una grandissima produzione di fotoni di annichilazione. È quindi spiegato il valore assunto da σ_{rad} , spiegare perchè l'asimmetria tra barioni ed anti-barioni fosse così piccola è terra da Premio Nobel.

3.3 Tempi Scala nel Modello Standard

Cronometrate l'evoluzione dell'Universo è un'operazione che viene fatta studiando l'evoluzione della temperatura, poichè $T = T(t)$ ⁸. Più in particolare, siamo soliti dividere la storia dell'Universo in Ere definite dal tipo di particella che può esistere in maniera stabile. Poichè infatti, data una generica particella x di massa m_x , questa potrà formarsi soltanto se la sua energia a riposo è maggiore dell'energia dell'ambiente, dovrà quindi valere

$$m_x c^2 \geq K_B T$$

Poichè l'Universo dopo il Big-Bang comincia a raffreddarsi, con il passare del tempo ($z \searrow$) si possono formare particelle via via più leggere. Dunque le Ere saranno comprese tra diverse **temperature di annichilazione**, cerchiamo quindi a che t l'Universo ha una

⁸Passeremo da $T(z)$ a $T(t)$.

determinata temperatura, equivalente all'energia necessaria per annichilire un determinato tipo di particelle, vedi Tabella 3.1.

Era	T_{inf}	T_{sup}
Leptonica	$T_l = 5 \cdot 10^9 K$	$T_\pi = 10^{12} K \equiv 100 MeV$
Adronica	$T_\pi = 10^{12} K \equiv 100 MeV$	$T_{QH} = 2 \cdot 10^{12} K \equiv 200 MeV$
dei Quark	$T_{QH} = 2 \cdot 10^{12} K \equiv 200 MeV$	-

Tabella 3.1: *Principali Ere dell'Universo, con $T_{inf} < T < T_{sup}$. Il lookback time aumenta dall'alto verso il basso. Nei pedici: $l = \text{leptoni}$, $\pi = \text{pioni}$, $QH = \text{Quark}$.*

Cerchiamo quindi di fissare le tempistiche. Prendiamo come sempre la Seconda Equazione di Friedmann

$$\left(\frac{1}{a_0} \frac{da}{dt} \right)^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a_0} \right)^2 = H_0^2 \left[\Omega_{0,M} \left(\frac{a_0}{a} \right) + \Omega_{0,R} \left(\frac{a_0}{a} \right)^2 + (1 - \Omega_{0,M} - \Omega_{0,R}) \right] \quad (3.19)$$

con $(1+z) = a_0/a$. Poichè ci stiamo avvicinando al Big-Bang, a diventa molto piccolo e quindi la (3.19) si semplifica in

$$\left(\frac{1}{a_0} \frac{da}{dt} \right)^2 = H_0^2 \Omega_{0,R} \left(\frac{a_0}{a} \right)^2 \quad (3.20)$$

separiamo le variabili

$$a da = a_0 H_0^2 \Omega_{0,R}^{1/2} dt$$

e integriamo, ottenendo

$$t(z) = \frac{1}{2H_0\Omega_{0,R}} (1+z)^{-2} = 3.2 \cdot 10^{19} (1+z)^{-2} \quad (3.21)$$

Possiamo quindi sostituire all'interno della (3.21) il valore del redshift dell'equivalenza materia-radiazione⁹, $z_{eq,MR} \approx 4.3 \cdot 10^4 (\Omega_{0,M} h^2) \approx 3 \cdot 10^4$, trovato¹⁰ all'inizio del Capitolo 3

$$t_{eq} := t(z_{eq,MR}) \approx 10^4 yr$$

trovando così quanto dura l'era della radiazione, ovvero il periodo in cui è predominante il contributo del gas di fotoni su tutte le altre componenti.

Per calcolarmi l'età dell'Universo formalmente dovrei fare una somma

$$t_0 = \int_{BB}^{oggi} dt = \int_{BB}^{eq} dt + \int_{eq}^{oggi} dt$$

dove nel primo addendo all'ultimo membro dovrei prendere $w = 1/3$ e nel secondo $w = 0$, ma poichè $t_{eq} \ll t_0$ posso largamente trascurare il contributo dell'Era della radiazione, ponendo all'interno della (3.19) Ω_R ed integrando da $t = 0$, oppure integrando direttamente

⁹Questa estrapolazione è solo marginalmente valida per le semplificazioni fatte sulla Seconda Equazione di Friedmann per ottenere l'espressione (3.21). Rimane comunque utile per fare una stima.

¹⁰Ponendo $\rho_M(z_{eq,MR}) = \rho_R(z_{eq,MR})$

da t_{eq} ad oggi, ottenendo nel primo caso l'età di un Universo dominato dalla materia come visto nella Sezione 2.4. La fase radiativa si esaurisce nei primi 10^4 anni di vita dell'Universo.

Dopo l'equivalenza varrà l'approssimazione inversa di quella fatta per passare dalla (3.19) alla (3.20), avremo che a diventa mano a mano più grande da cui quindi $\frac{a_0}{a} \gg \left(\frac{a_0}{a}\right)^2$, che porta ad una nuova forma per la (3.19), ovvero

$$\frac{1}{a_0} \frac{d a}{d t} = H_0 \Omega_{0,M}^{1/2} \left(\frac{a_0}{a} \right)^{1/2} \quad (3.22)$$

,

come prima separiamo le variabili e integriamo da t_{eq} ad oggi, otteniamo

$$t(z) = t_{eq} + \frac{2}{3} \frac{1}{H_0 \Omega_{0,M}^{1/2}} [(1+z)^{-3/2} - (1+z_{eq})^{-3/2}] \quad (3.23)$$

Questa relazione è valida per $z < z_{eq}$ ma solo fintanto che l'Universo può essere considerato piatto (finchè è valido EdS). Rimanendo all'interno di questo limite, portandoci sufficientemente lontani dall'equivalenza possiamo trascurare il termine $(1+z_{eq})^{-3/2}$ nella (3.23), e riscrivere quindi

$$t(z) = 2.1 \cdot 10^{17} (\Omega_0^{-1/2} h^{-1}) (1+z)^{-3/2} [sec] \quad (3.24)$$

.

Un tempo interessante da calcolare (e per il quale è possibile farlo poichè ci troviamo sufficientemente lontani dall'equivalenza ma in un'epoca in cui non siamo ancora sensibili alla curvatura dell'Universo) è quello della ricombinazione, che si stima avvenga a $z_{rec} \approx 1000$:

$$t(z_{rec}) \approx 3 \cdot 10^5 yr$$

.

Capitolo 4

L'Universo Primordiale

4.1 Il Problema dell'Origine

Abbiamo già visto nel Capitolo 2 che, ogni modello cosmologico omogeneo ed isotropo contenente fluidi perfetti con equazione di stato $p = w\rho c^2$ e con $0 \leq w \leq 1$, presenta una singolarità a $t = 0$ dove la densità diverge e la distanza propria tra due punti tende a zero. L'esistenza di questa singolarità, chiamata Big-Bang per scherno da Hoyle, è diretta conseguenza di quattro cose:

- il Principio Cosmologico;
- le equazioni di Einstein in assenza di una costante cosmologica;
- l'attuale espansione dell'Universo (in altre parole $(\dot{a}/a)_0 = H_0 > 0$);
- la forma che abbiamo assunto per l'equazione di stato.

È chiaro che il Big-Bang potrebbe essere solamente una conseguenza dell'estrapolare deduzioni basate sulla relatività generale in una situazione dove questa non è valida. Einstein stesso scriveva

“La teoria è basata su una separazione dei concetti di campo gravitazionale e materia. Mentre questa potrebbe essere una buona approssimazione per campi deboli, potrebbe presumibilmente risultare inadeguata per densità di materia estremamente elevate. Non si dovrebbe quindi assumere la validità delle equazioni per queste elevate densità e c'è la possibilità che in una teoria unificata questa singolarità non esisterebbe.”

(Albert Einstein, 1950)

Abbiamo bisogno di nuove leggi della fisica per descrivere il comportamento della materia in prossimità del Big-Bang, quando le densità e le temperature sono molto più alte di quanto non sia possibile raggiungere in esperimenti di laboratorio. In particolare, qualsiasi teoria della materia sotto condizioni estreme di questa entità, dovrà tenere conto degli effetti quantistici su una scala cosmologica. Il nome dato alla teoria della gravità che rimpiazza la relatività generale a energie ultra-elevate tenendo conto di questi effetti è **gravità quantistica**. Siamo molto lontani però dalla stesura di una teoria soddisfacente di questo tipo. Sembra però possibile che, in una teoria della gravità quantistica, la singolarità cosmologica non esisterebbe. In altre parole l'esistenza di questa singolarità nei modelli cosmologici basati sulla relatività generale classica sarebbe solo il risultato dell'incompletezza della teoria.

Oltretutto, esistono modi per evitare la singolarità anche senza fare appello esplicitamente ad effetti di gravità quantistica, rimanendo all'interno della teoria della gravità di Einstein.

Il primo tentativo da fare per evitare la singolarità potrebbe essere quello di prendere un'equazione di stato per la materia nell'Universo Primordiale che non sia quella classica di fluido perfetto con $w > -1/3$. Cominciamo scrivendo la solita Prima Equazione di Friedmann

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi}{3} \left(\rho + \frac{3p}{c^2} \right) a \quad (4.1)$$

Se avessimo un fluido perfetto che soddisfacesse la

$$p < -\frac{1}{3}\rho c^2$$

ovvero con $w < -1/3$, allora l'argomentazione data per la necessità di una singolarità nella Sezione 2.1.1 basata sulla direzione della concavità della curva $a(t)$ non sarebbe più valida e la singolarità potrebbe essere evitata. Fa al caso nostro la costante cosmologica, per la quale $w = -1$ poichè $p_\Lambda = -\rho_\Lambda c^2$. Ma abbiamo visto che ρ_Λ è estremamente bassa oggi ed è un valore costante (il valore attuale può essere orientativamente fissato a $|\Lambda| < \left(\frac{H_0}{c}\right)^2 \approx 10^{-55} \text{cm}^{-2}$): $\rho_\Lambda = \text{cost} = 0.7 \cdot \rho_{0,\text{crit}} \ll 1$. Poichè l'importanza dinamica di Λ cresce con il tempo, il suo effetto sarebbe estremamente basso anche nell'Universo primordiale. Un' maniera più realistica per interpretare la costante cosmologica sarebbe quella di considerarla una quantità collegata con la densità di energia del vuoto di un campo quantistico; potrebbe così trattarsi di una grandezza dinamica che poteva quindi essere più importante nel passato, piuttosto che una vera e propria *costante*.

Un'altra ipotesi per evitare la singolarità potrebbe essere quella di cambiare le Equazioni di Friedmann. Queste si basano sul concetto di omogeneità ed isotropia (come richiesto dal Principio Cosmologico) tramite la metrica e sulla supposizione di trattare con un fluido perfetto. Esistono dei tentativi di rimuovere la richiesta di omogeneità ed isotropia ma, oltre che complicare molto la teoria, anche le osservazioni dell'Universo su grande scala sembrano suggerire che non sia la strada giusta. L'alternativa è quella di supporre che il fluido non sia perfetto ma che siano presenti fenomeni di **conduzione** e di **viscosità** (shear e bulk). Anche questa strada porterebbe però ad una violazione del Principio Cosmologico, non sembra quindi esserci modo di evitare elegantemente, per il momento, la necessità del Big-Bang.

Questa parte della cosmologia è terra di frontiera ed esula dagli scopi di questo corso.

4.2 Il Tempo di Planck

Abbiamo già accennato al fatto che la teoria della relatività generale dovrebbe essere modificata quando la densità tende all'infinito, per poter tenere conto degli effetti quantistici su scale dell'ordine dell'orizzonte cosmologico. Einstein stesso era convinto dell'incompletezza delle sue teorie in questo senso. Nonostante non siamo ancora stati in grado di formulare una teoria della gravità quantistica è possibile definire dei tempi scala e delle energie tipiche, oltre i quali gli effetti quantistici della gravità diventano tali da non poter più fare affidamento sui calcoli derivanti dalla teoria della relatività generale. Come discuteremo a breve, il limite di validità della relatività generale è fissato al **tempo di Planck** che è dell'ordine di 10^{-43}sec dopo il Big-Bang.

Il tempo di Planck, t_P , è il tempo per il quale le fluttuazioni quantistiche persistono¹ su scale dell'ordine dell'**orizzonte di Planck** (o **lunghezza di Planck**) $l_P \approx t_P c$. Da queste due grandezze è possibile definire la **massa di Planck** come $m_P \approx \rho_P l_P^3$, dove la **densità di Planck** è dell'ordine di $\rho_P \approx (G t_P^2)^{-1}$, grandezza che deriva dalle Equazioni di Friedmann nel caso di Universo EdS. Per ottenere queste grandezze cominciamo considerando il principio di indeterminazione di Heisenberg, nella forma

$$\Delta E \Delta t \approx \hbar \quad (4.2)$$

da questa, lavorando dimensionalmente, abbiamo

$$\Delta E \Delta t \approx m_P c^2 t_P = \rho_P l_P^3 c^2 t_P = \frac{1}{G t_P^2} c^3 t_P^3 c^2 t_P = \frac{c^5 t_P^2}{G} \approx \hbar$$

ed è quindi possibile definire un tempo legato a tre parametri fondamentali, il tempo di Planck, appunto:

$$t_P := \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}} \approx 10^{-43} \text{sec} \quad (4.3)$$

Da questa grandezza è poi possibile stimare tutte le altre citate:

$$l_P := t_P c \approx \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \approx 1.7 \cdot 10^{-33} \text{cm} \quad (4.4)$$

$$\rho_P := \frac{1}{G t_P^2} \approx \frac{c^5}{G^2 \hbar} \approx 4 \cdot 10^{93} \text{g/cm}^3 \quad (4.5)$$

$$m_P := \rho_P l_P^3 \approx \sqrt{\frac{\hbar c^2}{G}} \approx 2.5 \cdot 10^{-5} \text{g} \quad (4.6)$$

$$n_P := l_P^{-3} \approx \frac{\rho_P}{m_P} \approx \left(\frac{c^3}{G \hbar} \right)^{3/2} \approx 10^{98} \text{cm}^{-3} \quad (4.7)$$

$$E_P := m_P c^2 \approx \sqrt{\frac{\hbar c^5}{G}} \approx 1.2 \cdot 10^{19} \text{GeV} \quad (4.8)$$

$$T_P := \frac{E_P}{K_B} \approx \sqrt{\frac{\hbar c^5}{G}} K_B^{-1} \approx 1.4 \cdot 10^{32} \text{K} \quad (4.9)$$

Quest'ultima relazione può essere trovata anche ponendo $\rho_P c^2 \approx \sigma T_P^4$. Spingendoci ancora oltre possiamo calcolare l'**entropia di Planck**, ovvero l'entropia totale all'interno dell'orizzonte al tempo di Planck:

$$\sigma_P \approx \frac{\rho_P c^2 l_P^3}{K_B T_P} \approx 1 \quad (4.10)$$

che equivale a dire che all'interno dell'orizzonte di Planck vi è un unico grado di libertà: è come se l'Universo fosse concentrato in un'unica particella² con le caratteristiche elencate.

¹Non vengono dissipate(?)

²"Dovremo quindi cercare di capire come si passa da $\sigma = 1$ a $\sigma \sim 10^8$." Questo sta scritto sugli appunti, credo che quel 10^8 sia il valore di σ_{rad} che però prima avevamo dato come $\approx 10^9$... ci può stare?

È notevole ed estremamente interessante come tutte queste quantità possano essere ricavate, a livello dimensionale, dalla combinazione di quattro costanti fondamentali della fisica: c , G , K_B e $\hbar$.

4.3 L'Era di Planck

Al fine di comprendere l'importanza fisica del tempo di Planck, è utile derivarlo come faremo ora, metodologia che andrà alla fine a coincidere con la definizione data nella precedente Sezione 4.2. Definiamo il **tempo di Compton** per un corpo di massa m come

$$t_C := \frac{\hbar}{mc^2} \quad (4.11)$$

rappresenta il tempo massimo entro il quale è possibile violare la conservazione dell'energia di una quantità $\Delta E \approx mc^2$, come si deduce dal principio di indeterminazione. Ad esempio si possono creare una coppia di particelle virtuali di massa m che vivranno per un tempo massimo t_C . Definiamo anche il **raggio di Compton** di un corpo di massa m come

$$l_C := ct_C = \frac{\hbar}{mc} \quad (4.12)$$

Ovviamente t_C e l_C decrescono con l'aumentare della massa m . Queste sono scale indicative della **fisica quantistica**.

D'altro canto possiamo definire anche il **raggio di Schwarzschild**, di un corpo di massa m , come

$$l_S := \frac{2Gm}{c^2} \quad (4.13)$$

che rappresenta, in ordini di magnitudine, il raggio che un corpo di massa m dovrebbe avere affinché la sua energia a riposo mc^2 sia uguale alla sua energia potenziale gravitazionale interna $U \approx Gm^2/l_S$. La relatività generale porta a concludere che una qualsiasi particella (fotoni compresi) non potrebbe fuggire da una regione di raggio l_S intorno ad un corpo di massa m ; in altre parole, parlando in termini di meccanica classica, la velocità di fuga da un corpo di massa m e raggio l_S è uguale alla velocità della luce: $c^2/2 = Gm/l_S$. Notare, comunque, che nell'ultima espressione abbiamo considerato l'“energia cinetica” per unità di massa di un fotone essere $c^2/2$ come se fosse una particella non-relativistica. È curioso come con queste approssimazioni si ottengano comunque risultati corretti³. Si può anche definire, similamente, un **tempo di Schwarzschild**

$$t_S := \frac{l_S}{c} = \frac{2Gm}{c^3} \quad (4.14)$$

;

questo non è altro che il tempo impiegato dalla luce per viaggiare una distanza l_S . Un corpo di massa m e raggio l_S ha un tempo di free-fall per il collasso $t_{ff} \approx (G\rho)^{-1/2}$, dove $\rho \approx ml_S^3$, che è dell'ordine di t_S . Al contrario di quanto avviene per le grandezze di Compton, sia t_S che l_S crescono con il crescere di m .

È facile verificare che la scala di Compton al tempo di Planck è esattamente uguale alla scala di Schwarzschild al tempo di Planck o, equivalentemente, i tempi di Compton e di

³In realtà sta cosa ha incuriosito più Coles e Lucchin che me, dato che non ho capito cosa intendevano...

Schwarzschild sono uguali tra loro e uguali al tempo di Planck per una particella con massa uguale alla massa di Planck. Questo non è un caso ma è dovuto al fatto che in maniera fisicamente formale il tempo di Planck è definito come il tempo al quale la raggio di Schwarzschild è uguale alla raggio di Compton. Per masse $m > m_P$, dette **corpi macroscopici**, abbiamo che $t_C < t_S$ e $l_C < l_S$: ci aspettiamo che le correzioni quantistiche siano trascurabili nella descrizione delle interazioni gravitazionali tra diverse parti del corpo. Qui l'autogravità del corpo può essere descritta con la relatività generale o anche, in buona approssimazione, con la teoria Newtoniana. D'altro canto però, corpi con $m < m_P$, ovvero **entità microscopiche** come le particelle fondamentali, hanno $t_C > t_S$ e $l_C > l_S$: le correzioni quantistiche saranno importanti nella descrizione della loro autogravità. Nel secondo caso quindi si dovrà utilizzare una teoria della gravità quantistica al posto di quella Newtoniana o della relatività generale.

Su un piano cosmologico, il tempo di Planck rappresenta il momento prima del quale il tempo scala caratteristico dell'espansione è tale che l'orizzonte cosmologico, dato rozzamente da l_P , contiene una sola particella avente $l_C > l_S$, ed è dunque necessario prendere in considerazione gli effetti quantistici su scale dell'orizzonte cosmologico.

È interessante anche notare il legame tra le quantità di Planck fornite nella Sezione 4.2 e le proprietà termodinamiche note dei buchi neri. A causa di effetti quantistici⁴, un buco nero di massa M irraggia come un corpo nero la cosiddetta **Radiazione di Hawking**. L'energia tipica dei fotoni emessi da un BH è dell'ordine di $\epsilon = K_B T$ dove T è la temperatura di corpo nero data dalla relazione

$$T = \frac{\hbar c^3}{4\pi K_B G M} \approx 10^{-7} \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^{-1} K \quad (4.15)$$

Da questa si può calcolare il tempo tipico che impiega un BH ad evaporare completamente (per emettere un'energia totale uguale alla sua energia a riposo Mc^2) emettendo radiazione con questo rate:

$$\tau \approx \frac{G^2 M^3}{\hbar c^4} \approx 10^{10} \left(\frac{M}{10^{15} g} \right)^3 yr. \quad (4.16)$$

È facile verificare che un eventuale BH con $M = m_P$ (e quindi con $\epsilon(m_P) = m_P c^2$) evaporerebbe in un t_P , emettendo una singola particella di energia E_P .

Queste considerazioni mostrano perchè ci aspettiamo che degli effetti quanto-gravitazionali siano importanti su un piano cosmologico, non solo al tempo di Planck, ma anche continuamente su scala microscopica per processi operanti su lunghezze dell'ordine di l_P e tempi dell'ordine di t_P . In particolare, le componenti di una metrica spazio-temporale g_{ij} soffrirebbero di fluttuazioni dell'ordine di $|\Delta g_{ij}/g_{ij}| \approx l_P/l \approx t_P/t$, su una scala spaziale l e una scala temporale t . Al tempo di Planck tali fluttuazioni sono dell'ordine dell'unità sulla scala spaziale dell'orizzonte, che è l_P , e sulla scala temporale dell'espansione, che vale t_P . Si può immaginare che l'Universo prima di t_P come composto da una collezione di BH di massa m_P , che evaporano e ricollassano in un tempo di Planck. La formazione dell'Universo sarebbe quindi dovuta ad una fluttuazione che fa sopravvivere uno (o più di uno se vogliamo credere alla teoria dei multi-versi) di questi BH oltre il t_P . Questo (forse unico) sopravvissuto evolverebbe diventando il nostro Universo. In questo scenario comunque saremmo molto lontani da quello idealizzato di fluido perfetto isotropo ed omogeneo descritto dalle Equazioni di

⁴Una coppia di particelle virtuali si forma nell'orizzonte degli eventi di un BH e non riannichilano poichè una viene "mangiata" dal BH e l'altra invece riesce a fuggire, se non ricordo male...

Friedmann e non sarebbe sorprendente se le deduzioni di tali equazioni, come la necessità dell'esistenza di una singolarità, non trovassero fondamento in una descrizione quantistica.

Prima di andare avanti parliamo di un altro problema già accennato in precedenza, ovvero quello della formazione delle particelle, anche se approfondiremo maggiormente il discorso quando parleremo di inflazione. Dal punto di vista quantistico, un campo deve essere pensato come un fluido di coppie di particelle virtuali che vengono continuamente create ed annichilite. Come avevamo già spiegato, il tempo entro il quale una particella virtuale di massa m può esistere è dell'ordine del tempo di Compton t_C , e la distanza che può percorrere prima di essere annichilita è perciò la lunghezza di Compton, l_C .

Se due particelle virtuali fossero cariche ed immerse in un campo elettrostatico potrebbero, una volta formatesi, venire separate per azione del campo poichè le loro cariche sarebbero opposte. Se la separazione raggiunta è maggiore o dell'ordine di l_C , esiste una certa probabilità che la coppia non annichilisca. In un campo elettrico sufficientemente intenso, si può raggiungere una netta produzione di coppie particella-antiparticella. In ogni caso questo scenario non è pura speculazione teorica poichè la formazione di coppie è stata osservata anche in laboratorio ($\delta = \delta\rho/\rho = (\rho - \bar{\rho})/\rho$). Da un punto di vista energetico, l'energia di massa a riposo della coppia $\Delta E \approx 2mc^2$ sarebbe compensata dalla perdita di energia da parte del campo elettrico, che finirebbe per essere dissipato dalla formazione di particelle.

Un effetto simile può presentarsi in presenza di un intenso campo gravitazionale non uniforme, dove la formazione di coppie particella-antiparticella avverrebbe in maniera simile al processo che porta all'emissione di Hawking. La separazione non avverrebbe a causa delle cariche opposte (la "carica" gravitazionale è la massa ed è sempre positiva), ma a causa della non uniformità del campo. Si può dimostrare che la formazione di particelle in questo modo può diventare molto importante, ad esempio, se il campo gravitazionale varia fortemente nel tempo, come ci aspettiamo avvenga nei primi istanti di espansione dell'Universo, in particolar modo se tale espansione è anisotropa. Alcuni suggeriscono che tale processo potrebbe essere responsabile della formazione di particelle nell'Universo. La creazione di coppie tenderebbe anche ad "isotropizzare", durante l'espansione, l'Universo che abbiamo detto essere originariamente fortemente caotico e non omogeneo.

Tutta questa parte della fisica che si spinge oltre i limiti di Planck si chiama (surprise surprise) **trans-Planckiana**.

Capitolo 5

Transizioni di Fase ed Inflazione

Nota: buona parte di questo capitolo è semplicemente una traduzione del corrispondente capitolo del Coles-Lucchin.

5.1 Il Big-Bang Caldo

Vedremo più avanti che, se la nucleosintesi cosmologica è la spiegazione corretta alle abbondanze osservate di elementi leggeri, l'Universo deve essere passato per una fase nella quale la sua temperatura era superiore di $T \approx 10^{12} K$. In questo capitolo esploreremo le conseguenze di un Universo in fasi di temperatura molto più elevata di questa. Si può dire rozzamente che definiamo modelli del Big-Bang ‘Caldo’ quelli in cui le temperature crescono quando ci si avvicina a $t = 0$ (in termini di “età dell’Universo”). Assumiamo che, dopo il tempo di Planck, la temperatura segua la legge

$$T(t) \approx T_P \frac{a(t_P)}{a(t)} \quad (5.1)$$

giustificheremo questa ipotesi più avanti.

Viaggiando all'indietro nel tempo ed avvicinandoci a T_P , le particelle che costituiscono l'Universo odierno diventano tutte relativistiche e le interazioni tra loro assumono le caratteristiche di una forza a lunga distanza come l'elettromagnetismo. In questo stato possiamo applicare il modello di un **gas perfetto ultrarelativistico** di particelle non degeneri¹ in equilibrio termico. La distribuzione all'equilibrio di una particella della specie i dipende da se è un fermione o un bosone e da quanti possibili spin o elicità essa possiede, g_i . La quantità g_i è a volte chiamata **peso statistico** o **numero di gradi di libertà** della specie i . La densità numerica di tali particelle può essere scritta

$$n_i(T) = \frac{g_i}{2\pi^2} \left(\frac{g_i}{2\pi^2} \right)^3 \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{e^x \pm 1} = \begin{pmatrix} 3/4 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{g_i}{2} \frac{2}{\pi^2} \zeta(3) \left(\frac{K_B T}{\hbar c} \right)^3 \quad (5.2)$$

dove il segno ‘+’ nell'integrale al secondo membro è per i fermioni e il segno ‘−’ per i bosoni, producono nel terzo termine $3/4$ per i fermioni e 1 per i bosoni. La ζ è la funzione zeta di Riemann², che esce dall'integrale; $\zeta(3) = 1.202$. Similarmente, la densità di energia di tali particelle è

¹i.e. con potenziale chimico $\mu = 0$

²Se interessasse è quella della celebre congettura di Riemann sull'esistenza di una relazione tra gli zeri di una funzione ed i numeri primi, un milione di euri anyone?

$$\rho_i c^2 = \frac{g_i K_B^4 T^4}{2\pi^2 \hbar^3 c^3} \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{e^x \pm 1} = \begin{pmatrix} 7/8 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{g_i}{2} \sigma T^4 \quad (5.3)$$

dove σ è la costante di Stefan-Boltzmann. E quindi la densità totale di energia sarà data dalla

$$\rho_i c^2 = \left(\sum_B g_{iB} + \frac{7}{8} \sim_F g_{jF} \right) \frac{\sigma T^4}{2} = g^*(T) \frac{\sigma T^4}{2} \quad (5.4)$$

dove $g^*(T)$ è detto **peso statistico effettivo** (anche **numero di gradi di libertà effettivo**) del fluido che compone l'Universo. Per ottenere la densità totale dell'Universo bisogna aggiungere altri contributi:

- $\rho_d(T)$, tiene conto di tutte quelle particelle che non sono più all'equilibrio con il resto del fluido perchè si sono già disaccoppiate dalle restanti (e.g. i neutrini dopo il loro disaccoppiamento);
- $\rho_{nr}(T)$, dovuto a quelle particelle che sono ancora accoppiate ma non sono più relativistiche (e.g. la materia nell'era del plasma);
- $\rho_{nt}(T)$, possibile componente dovuta a tutte quelle particelle che non sono mai in equilibrio termico con la radiazione (e.g. gli assioni).

Per il periodo che ci interessa studiare ora, i contributi $\rho_d(T)$, $\rho_{nr}(T)$ e $\rho_{nt}(T)$ sono in generale trascurabili se confrontati con $\rho(T)$.

La sezione d'urto di tutte le particelle è, nel limite asintotico $T \rightarrow T_P$,

$$\sigma_a \propto \alpha^2 \left(\frac{\hbar c}{K_B T} \right)^2 \quad (5.5)$$

con $\alpha^2 \sim 2500$, così che il tempo medio delle collisioni è

$$\tau_{coll} \approx \frac{1}{n \sigma_a c} \approx \frac{\hbar}{g^*(T) \alpha^2 K_B T} \quad (5.6)$$

Questo tempo va confrontato con il tempo scala di espansione $\tau_H = 1/H = a/\dot{a}$ che, nel caso EdS con $w = 1/3$, è

$$\tau_H = 2t = \left(\frac{3}{32\pi G \rho} \right)^{1/2} \approx \frac{2.42 \cdot 10^{-6}}{g^*(T)^{1/2}} \left(\frac{T}{1 \text{ GeV}} \right)^{-2} s \quad (5.7)$$

(notare che $1 \text{ GeV} \approx 1.16 \cdot 10^{13} K$). Abbiamo che

$$\frac{\tau_{coll}}{\tau_H} \approx \frac{1}{g^*(T)^{1/2} \alpha^2} \frac{T}{T_P} \ll 1$$

c'è quindi **perfetto equilibrio termico** e l'assunzione è quindi solida.

Altra assunzione da verificare è quella di gas perfetto. Considerando che tutte le interazioni sono asintoticamente equivalenti ad un'interazione elettromagnetica, si può verificare questa ipotesi per il caso di due elettroni: il rapporto r tra l'energia cinetica, $E_{kin} = K_B T$, e l'energia potenziale Coulombiana, $E_p \propto e^2 / \langle d \rangle \propto e^2 / \langle n_e \rangle^{-1/3}$ (dove e è la carica di

un elettrone e $\langle d \rangle$ è la distanza media tra due elettroni, $\langle n_e \rangle$ è la densità numerica n_i media per le particelle in esame, i.e. gli elettroni) è, per la (5.4),

$$r \approx \frac{K_B T \langle n_i \rangle^{-1/3}}{e^2} \approx \frac{\hbar c}{e^2} \approx 137$$

,

in buona approssimazione r è l'inverso della costante di struttura fine³.

L'ultima ipotesi, applicata implicitamente nelle relazioni trovate (in particolare nella (5.4)), è quella di particelle non degeneri. Non vedremo qui che questa ipotesi è ragionevole e giustificata, almeno per certi tipi di particelle: il gas all'equilibrio è **assolutamente non degeneri**.

La storia dell'Universo è quindi una storia di diminuzione della temperatura con conseguente variazione della densità e di tutte le altre variabili collegate.

5.2 Transizioni di Fase

Poiché nel modello del Big-Bang Caldo l'evoluzione dell'Universo dipende essenzialmente dalla fisica delle particelle fondamentali e dalle teorie che la descrivono, introdurremo le quattro interazioni fondamentali esistenti (individuate) in natura. Queste quattro forze sono la forza di **gravità**, la forza **elettromagnetica**, l'interazione **debole** e l'interazione **forte**. Si suppone che queste quattro forze siano tutte espressioni dello stesso tipo di interazione che le riunifica a temperature (ed, equivalentemente, energie) maggiori rispetto a quelle tipiche dell'Universo odierno, la ricerca sta muovendo degli attacchi teorici in questo senso.

La forza elettromagnetica e quella debole sono state riunificate nella forza **elettrodebole** e questa con la forza forte nella **teoria GUT**, **Grand Unified Theory**. Ancora non siamo riusciti a riunificare con successo la forza gravitazionale con la GUT.

Nella storia evolutiva dell'Universo si distinguono varie epoche delimitate da **transizioni di fase** in cui le forze si disaccoppiano, ne riportiamo alcune:

- **transizione di fase GUT**, quando l'Universo raggiunge un'energia $E_{GUT} \approx 10^{15} GeV$ (corrispondente ad una temperatura di $T \approx 10^{28} K$), la forza elettrodebole si disaccoppia dall'interazione forte;
- **transizione di fase elettrodebole**, $E_{EW} \approx 100 GeV$, la forza elettromagnetica si disaccoppia dall'interazione debole;
- **transizione di fase quark-adroni**, $E_{QH} \approx 200 MeV$;

³La costante di struttura fine è una costante legata alla costante di accoppiamento dell'interazione elettromagnetica. Le costanti di accoppiamento sono grandezze adimensionali corrispondenti ad ognuna delle 4 forze fondamentali. Ogni costante definisce l'intensità dell'interazione a un dato livello di energia, variando al variare di quest'ultimo. Ciò, a rigore, risulta contraddittorio in rapporto al significato letterale di "costante". In realtà in questo caso con tale termine ci si riferisce al fatto che, una volta calcolato il valore della costante di accoppiamento a una data energia, divengono note le intensità dell'interazione per qualsiasi livello di energia.

Recenti sperimentazioni hanno dimostrato che ad altissime energie i valori delle tre costanti di accoppiamento, elettromagnetica, debole e forte, sono molto vicini tra loro e di conseguenza le intensità delle tre forze divengono molto simili, dando credito all'ipotesi della loro unificazione a livelli di energia non ancora raggiungibili sperimentalmente. Poiché la forza gravitazionale è molto più debole rispetto alle altre tre forze fondamentali, anche la sua costante di accoppiamento differisce grandemente dalle altre tre. [wikipedia docet]

- **Quantum Cosmology**, riportata per completezza, è la teoria che tenta di unificare la GUT con la forza di gravità, $E_{QC} \approx E_P \approx 10^{19} GeV$, non ci avventureremo oltre questo limite.

Queste sono tutte transizioni di fase che dipendono dalla temperatura, esattamente come la liquefazione o la superconduttività.

5.2.1 Fisica delle Transizioni di Fase

In sistemi a più particelle si possono trovare processi che, schematicamente, possono portare alla scomparsa di un determinato stato di ordine, caratterizzato da un certo livello di simmetria, e all'apparizione di un nuovo stato di ordine con un grado di simmetria inferiore. In queste transizioni da ordine a disordine, chiamate **transizioni di fase**, una certa quantità macroscopica, chiamata **parametro d'ordine**, che indicheremo con Φ passa dal suo valore iniziale, "stato ordinato" $\Phi = 0$, ad un nuovo valore $\Phi \neq 0$, "stato disordinato".

L'esempio fisico più semplice di materiali che mostrano queste transizioni sono le sostanze ferromagnetiche o cristalline. Nei ferromagneti, per $T > T_C$ (temperatura di Curie), la fase stabile è disordinata con magnetizzazione netta $\mathcal{M} = 0$ (la quantità $\mathcal{M}$ in questo caso rappresenta il parametro d'ordine); a $T < T_C$ appare una magnetizzazione diversa da zero e la sua direzione rompe la simmetria rotazionale posseduta dal fase disordinata $T < T_C$. Nella fase cristallina dei solidi, il parametro d'ordine è la deviazione della distribuzione spaziale degli ioni da quella omogenea che hanno a $T > T_f$ (temperatura di fusione). A $T < T_f$ gli ioni sono disposti secondo un reticolo regolare.

La diminuzione del grado di simmetria del sistema può avere luogo anche se l'Hamiltoniana che ne descrive l'evoluzione mantiene lo stesso grado di simmetria, anche dopo la transizione. Per esempio, le equazioni macroscopiche della teoria del ferromagnetismo e le equazioni nella fisica dello stato-solido non prediligono nessuna particolare posizione spaziale o direzione. Lo stato ordinato che emerge da questa transizione di fase ha un grado di simmetria che è minore di quello che governa il sistema. Infatti, si può dire che le equazioni corrispondenti allo stato ordinato formano un set di soluzioni degeneri (i.e. soluzioni con la stessa energia), che hanno lo stesso grado di simmetria dell'Hamiltoniana. Tornando agli esempi sopra, la magnetizzazione $\mathcal{M}$ potrebbe in teoria assumere qualsiasi direzione. Allo stesso modo, il posizionamento degli ioni nel reticolo cristallino può essere raggiunto in un numero infinito di modi possibili. Tenendo conto di tutte queste possibilità, raggiungiamo ancora uno stato omogeneo ed isotropo. Qualsiasi piccola fluttuazione, nel campo magnetico di un ferromagnete o nel campo elettrico locale per un cristallo, selezionerà una soluzione dal set degeneri e il sistema finirà in uno stato corrispondente a quella (e solo a quella) fluttuazione. Ripetere la transizione con fluttuazioni random produrrà degli stati finali con allineamento random. Questo è in parte analogo al caso di una particella libera, descritto dalla meccanica Newtoniana con $\dot{\mathbf{v}} = 0$, che è simmetrica sia per traslazioni che per rotazioni (trasformazioni di Galileo). Le soluzioni $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t$, con $\mathbf{r}_0$ e $\mathbf{v}_0$ arbitrari, formano un set che rispetta la simmetria dell'equazione originale. Ma sono esclusivamente le condizioni iniziali $\mathbf{r}_0$ e $\mathbf{v}_0$ che, ad un particolare tempo, selezionano una soluzione da questo set e questa soluzione non ha lo stesso grado di simmetria di quello delle equazioni del moto.

Una transizione che **rompe la simmetria**, durante la quale il parametro d'ordine Φ cresce significativamente, può essere causata da influenze esterne di sufficiente intensità: per esempio, un intenso campo magnetico può portare alla magnetizzazione di un ferromagnete

anche sopra la T_C . Questo tipo di fenomeni si dicono processi di **rottura della simmetria indotti**, per distinguerli da quelli **spontanei**⁴.

La rottura spontanea della simmetria deriva da una graduale variazione del parametro d'ordine del sistema stesso. In questo caso è utile considerare l'**energia libera** del sistema

$$F = U - TS \quad (5.8)$$

dove U è l'energia interna, T è la temperatura e S l'entropia del sistema. Perché un sistema abbia uno stato di equilibrio è necessario che l'energia interna F abbia un minimo. L'energia libera coincide con l'energia interna solo a $T = 0$. A temperature maggiori, qualsiasi sia la forma di U , un aumento dell'entropia (i.e. disordine) in generale porta a una diminuzione dell'energia libera F ed è quindi la presenza di S a minimizzare l'energia. L'entropia aiuta sempre un sistema a raggiungere uno stato di equilibrio, poichè T è definita positiva.

Per sistemi nei quali c'è una transizione di fase, F è funzione del parametro d'ordine Φ . Considerato che Φ deve rispettare la simmetria dell'Hamiltoniana del sistema, (n.d.t. F ?) deve poter essere espressa in maniera da rimanere invariante per trasformazioni che lasciano invariata l'Hamiltoniana stessa. In certi casi F deve presentare un minimo a $\Phi = 0$ (stato disordinato), mentre in altri deve averlo a $\Phi \neq 0$ (stato disordinato)⁵.

Consideriamo ora il più semplice esempio possibile. Se l'Hamiltoniana presenta una simmetria di riflessione che viene rotta dalla comparsa di un parametro d'ordine Φ o, equivalentemente in questo caso, $-\Phi$, l'energia libera deve essere funzione esclusivamente di Φ^2 (in questo esempio assumiamo che Φ sia una variabile scalare reale). Se Φ non è troppo grande possiamo sviluppare F in serie

$$F(\Phi) = F_0 + \alpha\Phi^2 + \beta\Phi^4 \quad (5.9)$$

dove i coefficienti α e β dipendono dai parametri del sistema (e.g. temperatura, densità, pressione). Consideriamo la funzione quadratica ($\Rightarrow \beta > 0$) in Figura 5.1.

Quando $\alpha > 0$ abbiamo una curva del tipo indicato con '1' in Figura 5.1, mentre per $\alpha < 0$ abbiamo la curva di tipo '2'.

La curva 1 corrisponde ad uno stato disordinato; il sistema è nel suo minimo quando $\Phi = 0$. La curva 2, invece, ha due minimi a $\Phi_m = \pm(-\alpha/2\beta)^{1/2}$ e un massimo a $\Phi = 0$. In questo caso lo stato disordinato è instabile, mentre i minimi corrispondono a stati ordinati con la stessa probabilità. Una piccola perturbazione esterna casuale può avere due effetti:

- può rendere più profondo uno dei due minimi Φ_m rispetto all'altro;
- può dare una spintarella al sistema verso uno dei due minimi.

Supponiamo di avere un sistema che, da uno stato disordinato di equilibrio, subisca una transizione di fase che lo porti dalla curva 1 alla curva 2. All'inizio della transizione tale sistema si troverà in $\Phi = 0$, poichè abbiamo supposto fosse precedentemente all'equilibrio. Una qualsiasi perturbazione come descritto sopra può far sì che il sistema evolva ($\sim$ casualmente) verso uno dei due minimi, diciamo Φ_m , piuttosto che verso l'altro, $-\Phi_m$. In questo modo sarà avvenuta una rottura spontanea della simmetria.

⁴i.e. transizioni di fase spontanee ed indotte.

⁵Come visto negli esempi fatti in precedenza: nei ferromagneti il minimo di F deve essere a $\Phi = 0$, stato disordinato, la magnetizzazione è nulla; nei solidi cristallini la fase stabile è quella ordinata quindi il minimo di F dovrà essere a $\Phi \neq 0$, stato ordinato, presenza del reticolo.

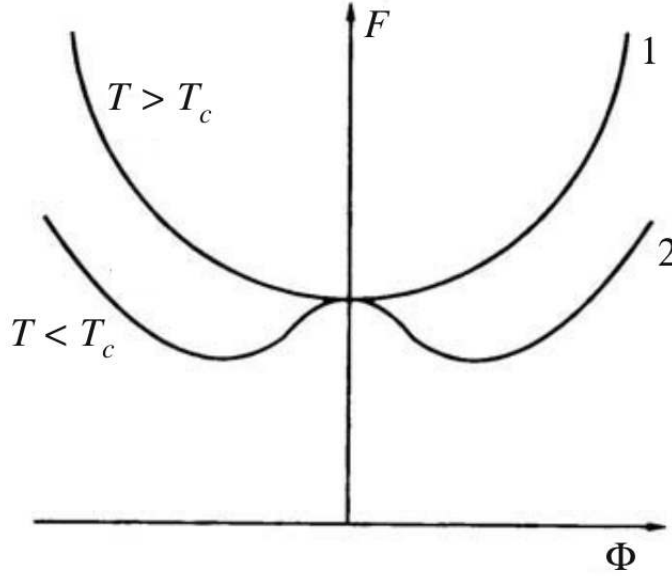


Figura 5.1: Energia libera F di un sistema che passa attraverso una rottura della simmetria in una transizione di fase di secondo tipo nel parametro d'ordine Φ . Il minimo della curva 1, corrispondente alla temperatura $T > T_C$, rappresenta lo stato di equilibrio disordinato; la transizione avviene a $T = T_C$; i due minimi della curva 2, corrispondente alla temperatura $T < T_C$, rappresentano i possibili stati di equilibrio ordinato che compaiono dopo la transizione.

Supponiamo ora che il sistema sia descritto da un solo parametro, diciamo la temperatura, e che il coefficiente α abbia la forma

$$\alpha = a(T - T_C)$$

con a un parametro positivo, avremo la situazione rappresentata dalla curva 2 quando $T < T_C$. Mentre T cresce verso T_C il parametro d'ordine Φ decresce lentamente ed è zero a T_C . Questa transizione, e la sua inversa, è nota come **transizione di fase del secondo tipo** ed è dovuta all'istantanea variazione della posizione di equilibrio. Il parametro d'ordine appare e scompare gradualmente e la differenza di energia libera ΔF tra $T > T_C$ e $T < T_C$, quando $T \approx T_C$ è infinitesimale.

Esiste anche una **transizione di fase del primo tipo** (eggraziearca...), nella quale a $T \approx T_C$ il parametro d'ordine appare o scompare rapidamente e la differenza ΔF è finita. Tale differenza è detta **calore latente** della transizione di fase. Questo tipo di transizione è descritta dall'equazione (5.9) con l'aggiunta di un termine

$$F(\Phi) = F_0 + \alpha\Phi^2 + \beta\Phi^4 + \gamma(\Phi^2)^{3/2} \quad (5.10)$$

con $\gamma < 0$. Il comportamento è del tipo mostrato in Figura 5.2

Abbiamo in questo caso tre possibili comportamenti, tutti con tre minimi:

- $T > T_C \rightarrow$ curva 1, un minimo assoluto e due relativi;
- $T = T_C \rightarrow$ curva 2, tre minimi assoluti;
- $T < T_C \rightarrow$ curva 3, due minimi assoluti e uno relativo.

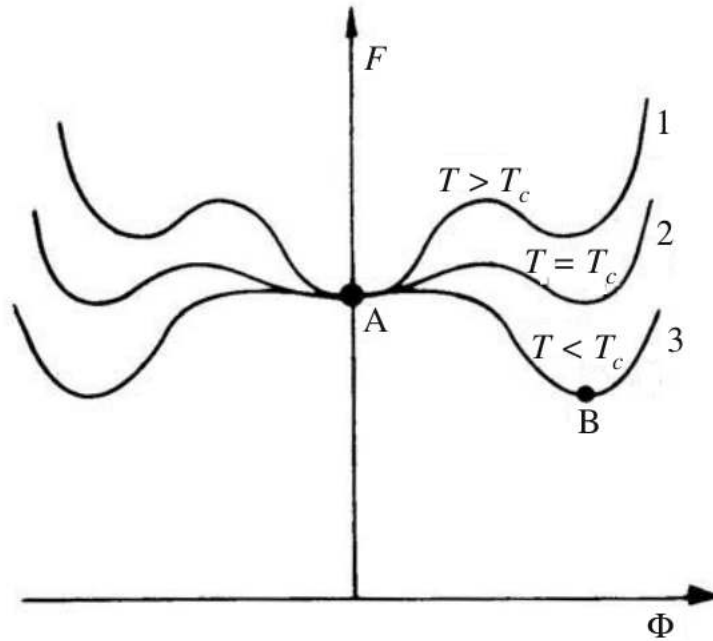


Figura 5.2: *Energia libera F di un sistema che passa attraverso una rottura spontanea della simmetria in una transizione di fase di primo tipo nel parametro d'ordine Φ . Il minimo assoluto della curva 1, corrispondente alla temperatura $T > T_C$, rappresenta lo stato di equilibrio disordinato; la transizione non avviene a $T = T_C$ (curva 2) ma a $T < T_C$, quando la barriera tra il minimo centrale e gli altri due diventa trascurabile (curva 3).*

L'energia libera presenta due nuovi minimi nello stato di equilibrio disordinato rappresentato dalla curva 1, tali minimi diventano uguali o minori di $F_0 = F(0)$ per $T \leq T_C$.

Nelle transizioni di fase del primo ordine, quando la temperatura cambia dalla situazione rappresentata dalla curva 1 di Figura 5.2 a quella rappresentata dalla curva 3, può avvenire un fenomeno detto di **super-raffreddamento**: il sistema rimane nello stato di disordine rappresentato da $\Phi = 0$ anche quando $T < T_C$ (stato A in figura); questo rappresenta lo stato di equilibrio metastabile. Se la temperatura decresce ulteriormente o se il sistema è perturbato da una qualche fluttuazione interna o esterna, allora esso evolverà rapidamente nello stato energeticamente stabile B. Tale passaggio non può avvenire fintanto che T è di poco minore di T_C poiché i due massimi ancora persistono. Quando la temperatura diventa di molto inferiore a T_C questi massimi si appiattiscono e il sistema è libero di passare allo stato B liberando calore latente nel processo. Quindi, al contrario di quanto avviene nella transizione di secondo tipo in cui il sistema passa istantaneamente da uno stato di equilibrio e l'altro per cui la variazione di energia interna è infinitesima, nel primo tipo inizialmente il sistema non si accorge della transizione (equilibrio metastabile). Se la temperatura diventa sufficiente bassa e ci sono fluttuazioni o se avviene un fenomeno di tunneling, il sistema raggiunge il nuovo stato di equilibrio e viene liberata una ΔF finita. Questa energia rimasta immagazzinata nel sistema e maggiore rispetto a quella dell'ambiente viene rilasciata e provoca un nuovo riscaldamento del sistema fino ad una temperatura dell'ordine di T_C , un fenomeno chiamato **reheating**. Avvenuto il "rotolamento" del sistema nello stato B, esso oscillerà per un periodo intorno alla posizione rilasciando una ulteriore quantità di energia.

In Figura 5.3 entrambi i tipi di transizione a confronto. Attualmente non è del tutto chiaro nelle teorie cosmologiche se le diverse transizioni di fase attraverso le quali passa il

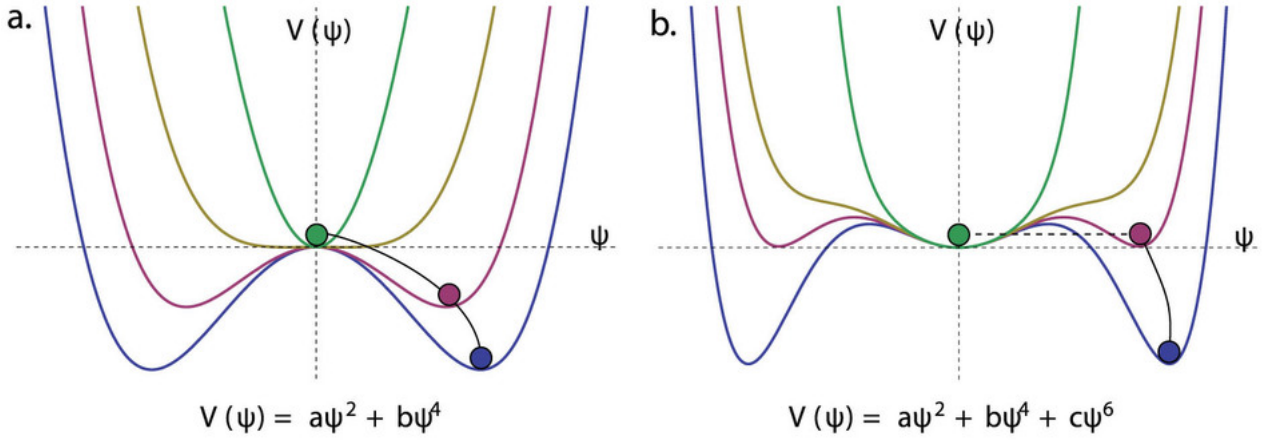


Figura 5.3: Le due forme dell'energia libera F di un sistema che passa attraverso una rottura spontanea della simmetria in una transizione di fase di secondo tipo (caso a.) e di primo tipo (caso b.) nel parametro d'ordine Φ . Notare la gradualità della transizione di secondo tipo rispetto al salto che fa quella di primo tipo.

nostro Universo siano di primo o secondo tipo.

5.3 Transizioni di Fase Cosmologiche

Poichè, secondo i modelli standard della fisica delle particelle, le transizioni di fase dei tipi visti nella precedente sezione appaiono generalmente nell'Universo primordiale, i primi stadi del Big-Bang sono spesso descritti come **era delle transizioni di fase**.

Il periodo che va da $t_P \approx 10^{-43}s$, corrispondente ad una temperatura⁶ $T_P \approx 10^{19}GeV$, fino al momento in cui i quark vengono confinati negli adroni a $T \approx 200 \div 300MeV$, può essere diviso in diversi intervalli legati alle transizioni di fase che li caratterizzano.

1. $T_P \approx 10^{19}GeV > T > T_{GUT} \approx 10^{15}GeV$ dove $T_P \leftrightarrow t_P$ e $T_{GUT} \leftrightarrow t \sim 10^{-37}s$, della T_{GUT} siamo piuttosto sicuri solo a livello di ordine di grandezza poichè il valore preciso cambia molto a seconda dei modelli. In questo periodo gli effetti di gravità quantistica diventano trascurabili. L'era prima della transizione di fase GUT, che avviene a T_{GUT} , è caratterizzata dalla possibilità di violare la conservazione del numero bario-nico, raggiunta la temperatura di soglia l'interazione forte è disaccoppiata dalla forza elettrodebole. Grazie a questa caratteristica, qualsiasi eccesso di barioni rispetto agli anti-barioni viene compensata. La **bariogenesi** isotropizza (omogenizza) l'Universo, è un processo che facilita il raggiungimento di isotropia ed omogeneità, come richiesto dalla teoria di Friedmann. Le trasformazioni (fluttuazioni) che avvengono in questa fase sono di tipo adiabatico. (importante notare che durante la transizione sono ancora in condizioni GUT).

2. $T_{GUT} > T > T_{EW} \approx 10^2GeV$ dove $T_{EW} \leftrightarrow t \sim 10^{-11}s$. Qui dovresti avere

$$K_B T \approx m_{part} c^2$$

ma se sostituiamo tutti i valori noti (i.e. K_B , T , c), escono particelle di massa inesistente, sia per la teoria che per le osservazioni, questo è un periodo di cui si conosce

⁶Perdonare il professore se da qui in avanti comincerà a parlare di energia e temperatura come se fossero la stessa cosa...

poco. Supponiamo che il raggio dell'orizzonte sia dell'ordine di $R_H \approx 1cm$ e che il numero di particelle sia dell'ordine di $N \approx 10^{19}$.

3. $T_{EW} > T > T_{QH} \approx 200MeV$, in questa fase i quark si uniscono a formare gli adroni fino a non esistere più liberi.

5.4 Problemi del Modello del Big-Bang Caldo

Le teorie cosmologiche moderne che fanno uso della nuova fisica (esistenza dell'era delle transizioni di fase), pur risolvendo svariati problemi ne fanno sorgere altri:

- problema dell'origine;
- problema dei monopoli magnetici;
- problema della costante cosmologica;
- problema dell'orizzonte cosmologico;
- problema della piattezza.

Abbiamo già affrontato il problema dell'origine e abbiamo visto come non siamo in grado con la teoria della relatività classica di andare oltre il t_P . Affronteremo ora gli altri problemi qui elencati.

5.4.1 Problema dei Monopoli Magnetici

Questo problema nasce nel momento in cui si assume la **teoria GUT** per spiegare le prime fasi di vita dell'Universo. La teoria prevede infatti l'esistenza di **difetti topologici** chiamati **monopoli magnetici** (MM), aventi una carica magnetica

$$g_n = ng_D$$

che è un multiplo della **carica magnetica fondamentale di Dirac**

$$g_D = \frac{\hbar c}{2e} = 68.5e \quad (5.11)$$

in unita di carica elettrostatica. Oltre a sorgere un problema osservativo, in quanto tali cariche non sono mai state osservate, ne sorgerebbe anche un altro derivante dalla loro massa che dovrebbe essere

$$m_{MM} \approx 4\pi \frac{\hbar c}{e^2} m_X \approx 10^3 m_X \sim 10^{16} GeV = 10^{-8} g$$

,

dove X è il bosone che media l'interazione GUT, chiamato **bosone di Higgs**⁷, con una massa

$$m_X \approx e(\hbar c)^{1/2} m_{GUT} \approx 10^{-1} m_{GUT}$$

⁷Quant'è la massa del bosone di Higgs? secondo quanto risulta qui dovrebbe essere dell'ordine dei $10^{12 \div 13} GeV$, all'LHC hanno però trovato $125 GeV$...

dove m_{GUT} è l'energia corrispondente alla rottura spontanea della simmetria GUT.

Le dimensioni dei monopoli sarebbero

$$r_{MM} \approx \frac{\hbar}{m_X c}$$

La densità numerica che hanno questi MM è legata ad una distanza tipica della teoria, detta **lunghezza di correlazione del campo di Higgs**, ξ , in formule

$$n_{MM} \propto \xi_{MM}^{-3}$$

A tale densità viene imposto un limite inferiore, dalla necessità che la distanza massima tra due MM ξ_{max} non sia maggiore del raggio dell'orizzonte a quell'epoca. Deve quindi essere

$$n_{MM} \propto \xi_{MM}^{-3} > r_H^{-3}$$

ma al tempo di GUT si può assumere tranquillamente che l'universo sia radiativo, quindi il raggio dell'orizzonte a t_{GUT} sarà dato da $r_H = 2ct_{GUT}$, andando a sostituire avremo quindi

$$n_{MM}(t_{GUT}) > (2ct_{GUT})^{-3} = 10^{-10} n_\gamma(t_{GUT})$$

dove n_γ è la densità numerica di fotoni. Questo rapporto NON varia nel tempo, ogni processo fisico seguente a t_{GUT} si pensa sia estremamente inefficiente a variare il rapporto n_{MM}/n_γ che si manterrebbe quindi inalterato da t_{GUT} ad oggi, t_0 . Dunque ci attendiamo che la densità attuale di MM sia

$$n_{MM} > 10^{-10} n_\gamma(t_0) \approx n_b(t_0)$$

ovvero la densità odierna di monopoli magnetici sarebbe paragonabile, se non maggiore, di quella dei barioni: avrei un Universo con tanti barioni quanti monopoli magnetici. Risulterebbe infatti

$$\Omega_{MM} \geq \Omega_b \frac{m_{MM}}{m_p} \geq 10^{16} \Omega_b \approx 10^{14}$$

Questo valore è enorme e comporterebbe un Universo estremamente chiuso. Un Universo di questo tipo sarebbe ricollassato in pochissimi secondi⁸. In questo modo la teoria GUT sembrerebbe debba essere scartata, ma vedremo che l'introduzione dell'inflazione ci salverà la giornata⁹.

⁸Tipo la balena di Douglas Adams: Big-Bang: chi sono? cosa ci faccio qui? bam: Big Crunch!

⁹Passando per una fase di espansione accelerata la densità di MM risulterà largamente diluita (i volumi vanno con il cubo del parametro di accelerazione), di conseguenza i monopoli magnetici oggi avrebbero una densità ridicola che ne renderebbe praticamente impossibile la ricerca.

5.4.2 Problema della Costante Cosmologica

Altro grande problema della teoria GUT è legato all'esistenza della costante cosmologica. In particolare risulta che gli effetti di Λ sarebbero diventati apprezzabili solo in tempo recente (**problema della coincidenza**).

Oggi misuriamo (stima osservativa) $\Omega_{\Lambda} = 0.68$ che corrisponde a $\rho_{\Lambda} \approx \rho_{0,crit} \approx 10^{-29} g/cm^3 = 10^{-48} GeV^4$, cioè la costante cosmologica dovrebbe valere

$$\Lambda \approx 10^{-55} cm^{-2}$$

, un valore molto piccolo. Assumendo che la CC sia legata ad un campo scalare, e quindi all'esistenza di una particella corrispondente, questa avrebbe una massa

$$m_{\Lambda} = \left[\rho_{\Lambda} \left(\frac{\hbar}{c} \right)^3 \right]^{1/4} \leq 10^{-32} eV$$

che, dal punto di vista della fisica delle particelle, è una massa piccolissima! Basta compararla con le stime più recenti del limite superiore che dovrebbe avere la massa del fotone: $m_{\gamma} < 3 \cdot 10^{-27} eV$. Il problema sorge quindi dal fatto che le quantità $|\Lambda|$, $|\rho_{\Lambda}|$ e $|m_{\Lambda}|$ sono così incredibilmente piccole.

L'interpretazione attuale della CC è quella di **energia del vuoto**, questo significa che si pensa che la densità ρ_{Λ} e la corrispondente pressione p_{Λ} rappresentino densità e pressione del vuoto, che crediamo sia il livello fondamentale di un sistema quantistico:

$$\rho_{\Lambda} \equiv \rho_v, \quad p_{\Lambda} \equiv p_v = -\rho_v c^2 \quad (w = -1)$$

(l'equazione di stato deriva dalla Lorents-invarianza del tensore energia-impulso del vuoto). Possiamo risalire al valore al tempo di Planck¹⁰ della densità del vuoto. Come abbiamo visto nella Sezione 5.2 ogni volta che un sistema passa attraverso una transizione di fase, avviene una variazione dell'energia libera. Assumiamo come transizioni di fase quelle elencate in Sezione 5.3, la variazione dell'energia del vuoto ad ognuna di queste andrà come

$$\Delta\rho_v \approx \frac{m_i^4}{(\hbar/c)^3} \quad (5.12)$$

dove $\Delta\rho_v$ è la variazione di densità di energia del vuoto (ebbene sì, densità e densità di energia sono un po' la stessa cosa..) e m_i è l'energetica della transizione, al secolo la temperatura (in eV) a cui avviene la transizione. Avremo quindi che

- transizione GUT: $m_{GUT} \approx 10^{15} GeV$;
- transizione EW: $m_{EW} \approx 10^2 GeV$;
- transizione QH: $m_{QH} \approx 10^{-1} GeV$.

L'energia del vuoto al tempo di Planck sarà quindi uguale al valore odierno sommato ai valori persi durante le transizioni di fase:

$$\rho_v(t_P) = \rho_v(t_0) + \sum_i \Delta\rho_v(m_i) \approx (10^{-48} + 10^{60}) [GeV^4] = \left(\sum_i \Delta\rho_v(m_i) \right) (1 + 10^{-108}) \quad (5.13)$$

¹⁰Da qui in avanti ci riferiremo all'istante iniziale come fosse il tempo di Planck, poichè non possiamo andare ad indagare oltre questa soglia.

dove $\rho_v(t_P)$ e $\rho_v(t_0)$ sono le densità del vuoto ai tempi di Planck ed attuale, rispettivamente, e m_i le energie di cui sopra. L'equazione (5.13) ci direbbe quindi che $\rho_v(t_P)$ deve differire da $\sum_i \Delta\rho_v(m_i)$ attraverso transizioni di fase successive solamente di una parte su 10^{108} , ovvero l'Universo dovrebbe essersi svuotato di tutta la sua energia tranne che per una piccolissima parte. Questo però risulta ai nostri occhi come un estremo 'fine-tuning', $\rho_v(t_P)$ o di $\sum_i \Delta\rho_v(m_i)$.

Come se non bastasse, e l'abbiamo già visto, risulta che l'effetto della CC sarebbe divenuto non trascurabile nell'Universo tra $z = 0$ e $z = 1$, ovvero l'altroieri: **problema della coincidenza**. Dal punto di vista scientifico risulta altamente inverosimile.

Ad oggi esistono solo alcuni modelli teorici che tentano di risolvere questo problema, che è considerato da molti cosmologi come il peggiore in cui si imbattono i nostri modelli. Anche l'inflazione non riesce a venirne a capo. Problema molto apertissimo!

5.4.3 Problema dell'Orizzonte Cosmologico

Abbiamo definito l'orizzonte cosmologico come la regione in connessione causale con un determinato punto (evento) nello spazio tempo, il **raggio dell'orizzonte cosmologico** è dato dalla

$$r_H(t) = a(t) \int_0^t \frac{c dt'}{a(t')} \quad (5.14)$$

Abbiamo dimostrato che, nei modelli di Friedmann, questa quantità è finita. Nel caso di Universo EdS (buona approssimazione della situazione che stiamo studiando) la (5.14) diventa

$$r_H(t) = \frac{c}{H_0 \Omega_0^{1/2}} \frac{2}{3w+1} \left(\frac{a}{a_0} \right)^{\frac{3(1+w)}{2}} \quad (5.15)$$

Il raggio dell'orizzonte cosmologico è in generale da non confondere con quello della **sfera di Hubble**, $\tilde{r}_H(t) = c/H = c/(a/\dot{a})$ che solitamente ne è una sovrastima, r_H è più accurato. D'altro canto però in regimi EdS le due quantità sono approssimativamente uguali, $r_H \approx \tilde{r}_H$.

Supponiamo ora che il parametro di espansione $a(t)$ tenda a zero nell'Universo primordiale, seguendo un andamento a legge di potenza del tipo $a(t) \propto t^\beta$ con $\beta > 0$. Sostituendo nella (5.14) abbiamo

$$R_H(t) \propto t^\beta c \int_0^t t^{-\beta} dt \propto t^\beta [t^{-\beta+1}]_0^t \quad (5.16)$$

Mentre nell'estremo superiore la parentesi non ci dà problemi, nell'estremo inferiore potrebbe divergere:

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^{-\beta+1} < +\infty \iff -\beta+1 > 0 \Rightarrow \beta < 1$$

Dunque avremo che il raggio dell'orizzonte sarà finito per $0 < \beta < 1$. Deriviamo ora $a \propto t^\beta$ rispetto al tempo, otteniamo

$$\dot{a} \propto \beta t^{\beta-1} \quad \ddot{a} \propto \beta(\beta-1)t^{\beta-2}$$

Sostituendo nella Prima Equazione di Friedmann abbiamo

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi}{3}Ga\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) \Rightarrow \beta(\beta - 1) = -\frac{4\pi}{3}Gt^2\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) \propto \ddot{a}$$

Questo dimostra che la condizione per l'esistenza della singolarità del Big-Bang, $\ddot{a}$, richiede che $0 < \beta < 1$ e che quindi deve esistere anche un orizzonte della particella. La condizione per avere raggio dell'orizzonte finito e quella per avere il Big-Bang impongono gli stessi vincoli su β , quindi le due cose devono essere collegate.

L'esistenza dell'orizzonte cosmologico però rende il Principio Cosmologico difficile da accettare. Questo principio richiede che, particelle all'esterno della regione delimitata dall'orizzonte cosmologico di altre, abbiano condizioni fisiche fortemente correlate con queste. Questo problema nasce da una serie di osservazioni, la più importante delle quali è quella della CMB. Vedremo che la CMB si origina quando radiazione e materia si disaccoppiano, a $z \approx 10^3$, ed è dovuta all'ultimo scattering thomson tra materia (elettroni) e fotoni. La superficie corrispondente al valore dell'orizzonte cosmologico dell'istante in cui questo avviene è detta **superficie di ultimo scattering**, da quì in poi i fotoni hanno un libero cammino medio infinito. Il raggio di questa superficie è

$$R_{ls} \approx \frac{c\Delta t}{1 + z_{ls}} = \frac{c(t_0 - t_{ls})}{1 + z_{ls}} \approx \frac{ct_0}{z_{ls}} \quad (5.17)$$

poichè $z_{ls} \gg 1$ e $t_0 \gg t_{ls} \approx 3 \cdot 10^5 [yr]$.

Il raggio dell'orizzonte della particella (orizzonte cosmologico) a quest'epoca è dato dalla (5.15) con $w = 0$

$$R_H(z_{ls}) \approx \frac{c}{H_0 \Omega_0^{1/2}} (1 + z_{ls})^{-3/2} = 3ct_0 z_{ls}^{-3/2} = 3z_{ls} R_{ls} z_{ls}^{-3/2} = 3R_{ls} z_{ls}^{-1/2}$$

Da questa ci imbattiamo quindi nel seguente problema:

$$R_H(t_{ls}) \approx 10^{-1} R_{ls}$$

all'epoca dell'ultimo scattering la CMB era omogenea ed isotropa su una sfera di raggio almeno dieci volte più grande di quella dell'orizzonte cosmologico.

La Soluzione Inflazionaria

Sebbene discuteremo più approfonditamente il modello dell'inflazione più avanti, introduciamo le idee di base poichè offrono una soluzione elegante al problema dell'orizzonte cosmologico. Tale problema, come abbiamo detto, è essenzialmente dovuto al fatto che una regione di dimensioni proprie l può diventare connessa causalmente quando l'orizzonte cosmologico ne raggiunge le dimensioni, $R_H = l$. Nei tipici modelli di Friedmann, ai primordi dell'Universo, il raggio dell'orizzonte cresce come t , mentre le dimensioni proprie di una regione di dimensioni comoventi fissate crescono come t^β , con $\beta < 1$. Nel contesto dell'inflazione è più utile ragionare in termini di raggio della sfera di Hubble che, pur essendo una quantità istantanea che non tiene conto di tutta la storia evolutiva dell'Universo, in condizioni EdS, in condizioni EdS come quelle in cui ci troviamo in questa epoca, risulta essere un'ottima approssimazione del raggio dell'orizzonte. Per il resto del capitolo confonderemo i due raggi, come fossero la stessa cosa, tenere a mente però la differenza teorica tra i due. Le dimensioni proprie della sfera di Hubble sono date da $R_c = c/H = ca/\dot{a}$ e le sue dimensioni comoventi¹¹ sono $r_c = R_c(a_0/a) = ca_0/\dot{a}$. La scala comovente l_0 entra nell'orizzonte cosmologico al

¹¹Indichiamo con la lettera piccola le dimensioni comoventi dell'orizzonte.

tempo $t_H(l_0) \neq 0$ poichè r_c cresce con il tempo. I processi che avvengono al tempo t non possono connettere causalmente la regione di dimensioni l_0 finché non abbiamo $t \geq t_H(l_0)$. Nei modelli ‘standard’¹², con $p/\rho c^2 = w = \text{cost}$ e con $w > -1/3$, nelle prime fasi di vita dell’Universo:

$$r_H = \frac{a_0}{a} R_H(t) = a_0 \int_0^t \frac{c dt'}{a(t')} \approx \frac{3(1+w)}{(1+3w)} c t_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{(1+3w)}{3(1+w)}} \approx c \frac{a_0}{\dot{a}}$$

così che

$$r_H \approx r_c$$

Svolgiamo ora quindi lo studio di funzione del raggio comovente, $r_H \approx r_c$. In particolare, calcoliamone la derivata prima va come

$$\dot{r}_H \propto -\frac{\ddot{a}}{\dot{a}^2}$$

poichè $\dot{a}^2$, il raggio dell’orizzonte cresce quando $\ddot{a} < 0$. Dalla Prima Equazione di Friedmann e dall’equazione di stato $p = w\rho c^2$, abbiamo

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi}{3} G a \left(\rho \frac{3p}{c^2} \right) \Rightarrow \ddot{a} \propto 1 + 3w$$

perciò $1 + 3w < 0 \Rightarrow w > -1/3$. Quando $w < -1/3$ abbiamo le condizioni opposte e l’espansione è accelerata con un valore negativo di $\dot{r}_H$ e quindi un valore decrescente di r_H . Ma i modelli di Friedmann hanno sempre $w > -1/3$ e quindi r_H è sempre monotona crescente, ciò vuol dire che, al tempo t , solo le scale più piccole di $r_H(t)$ sono in connessione causale. In Figura 5.4 è mostrato come la scala della superficie di ultimo scattering sia al di fuori di quella connessa causalmente.

Per risolvere questo problema ammettiamo che esista un periodo finito $t_i < t < t_f$, in qualche momento durante l’espansione dell’Universo, nel quale la funzione r_H diventa decrescente e superato il quale riprende la sua evoluzione normale, come in Figura 5.5.

Questo ci aiuta a risolvere il problema perchè permette l’esistenza di una fase iniziale che porta in connessione causale scale più grandi di quelle del raggio dell’orizzonte attuale. Così si spiega il fatto che le regioni della CMB sono connesse causalmente su scale maggiori di quelle dell’orizzonte calcolato, come se il periodo $t_i < t < t_f$ non fosse esistito. Il problema sarebbe quindi dovuto alla assunzione di aumento lineare del raggio dell’orizzonte.

Se l’andamento fosse quello lineare che ci immaginavamo, una volta che una regione entra in connessione causale ci rimane per sempre. Questo non succede nel caso illustrato in Figura 5.5: la scala l_0 entra in connessione causale a t_1 e vi rimane fino a t_2 , nell’intervallo tra $[t_2; t_3]$ le sue proprietà non possono venire alterate da fenomeni fisici (causali). Passato t_3 essa torna di nuovo causalmente connessa, nel senso che processi causali possono alterare le proprietà fisiche di regioni con dimensioni l_0 . Un osservatore che si venga a trovare in t_3 , senza sapere del periodo di espansione accelerata penserebbe che la scala l_0 sta entrando per la prima volta in connessione causale e si stupirebbe di osservarla omogenea.

Affinchè tutto questo possa accadere è necessario che l’Universo passi attraverso una fase di **espansione accelerata**, diversa da quella attuale, poichè deve essere avvenuta molto

¹²Fluidi perfetti classici.

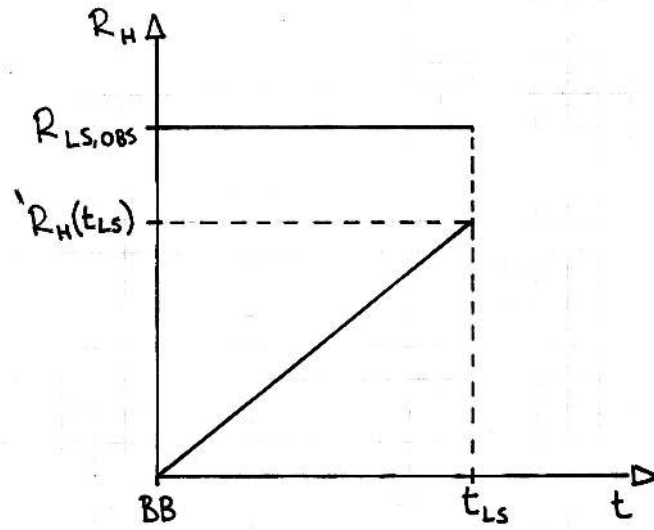


Figura 5.4: Crescita del raggio dell'orizzonte cosmologico con il tempo, senza inflazione, è anche indicata la scala che dovrebbe avere l'orizzonte all'istante dell'ultimo scattering.

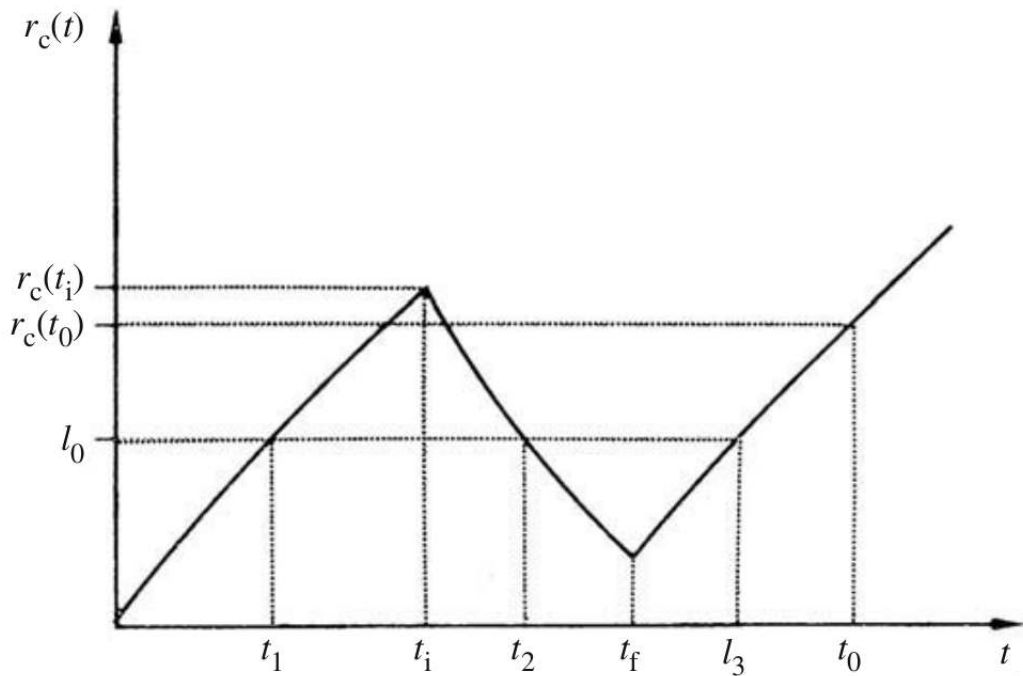


Figura 5.5: Andamento di r_H in funzione del tempo, nell'intervallo $t_i < t < t_f$ la funzione decresce per poi riprendere il suo normale andamento fino ad oggi, t_0 . Secondo questo modello esistono più istanti nella storia evolutiva dell'Universo in cui l'orizzonte cosmologico aveva una determinata estensione.

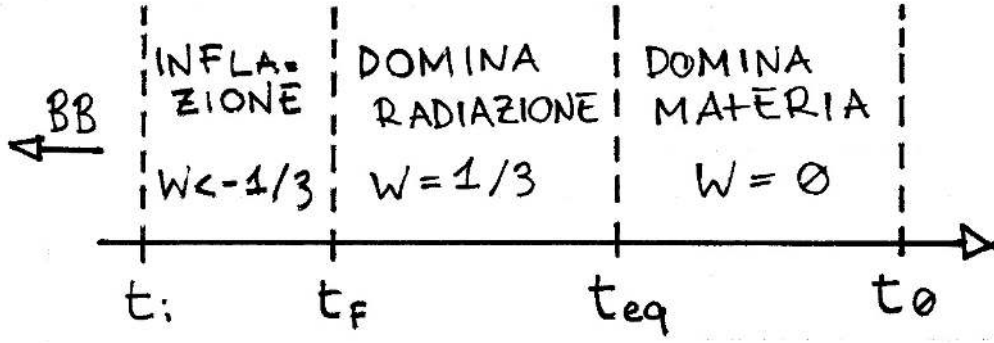


Figura 5.6: Scala di alcuni tempi fondamentali e corrispondenti valori del parametro *vud-doppio*.

prima di $z < 1$. Come visto infatti per avere una decrescita di r_H è necessario che $\ddot{a} > 0$ e quindi che $w < -1/3$. La fase compresa nell'intervallo $[t_i; t_f]$ è detta fase dell'**inflazione**¹³.

I problemi non finiscono qui però¹⁴: anche la durata di tale fase è importante. Se infatti questa durasse troppo “poco” il raggio dell'orizzonte comovente all'inizio dell'inflazione risulterebbe più basso rispetto al raggio comovente attuale. Questo impone quindi la condizione sulla “durata” del periodo inflativo che dovrà essere tale per cui $r_H(t_i) \geq r_H(t_0)$. In realtà se vogliamo evitare di creare una “soluzione antropica”, cioè che andrebbe bene oggi ma in un futuro prossimo non dovrebbe più essere valida, dobbiamo imporre $r_H(t_i) \gg r_H(t_0)$.

Ci chiediamo allora quanto debba durare il periodo inflativo. Dividiamo la storia dell'Universo in periodi in cui varia il valore della costante w da inserire nelle Equazioni di Friedmann:

- $0 < t < t_i$, periodo immediatamente successivo al Big-Bang in cui l'Universo è dominato dalla radiazione: $w = 1/3$;
- $t_i < t < t_f$, periodo dell'inflazione in cui l'Universo è in espansione accelerata: $w = -1/3$;
- $t_f < t < t_{eq}$, al termine dell'inflazione fino all'equivalenza l'Universo è ancora dominato dalla radiazione: $w = 1/3$;
- $t_{eq} < t < t_0$, dall'equivalenza ad oggi, senza considerare la costante cosmologica, l'Universo è dominato dalla materia: $w = 0$.

Riscriviamo a questo punto la Seconda Equazione di Friedmann nella forma con $H^2(t)$ (la otteniamo dividendo quella in $\dot{a}^2$ per $a^2(t)$):

$$H^2(t) = H_0^2 \left(\frac{a_0}{a} \right)^2 \left[\Omega_{0,w} \left(\frac{a_0}{a} \right)^{1+3w} + 1 - \Omega_{0,w} \right]$$

¹³In tutta questa discussione non bisogna dimenticare che stiamo parlando di raggio comovente, cioè noi osservatori siamo sul sistema di riferimento in espansione con l'Universo, è per questo che abbiamo l'impressione che la scala diminuisca, in realtà non diminuisce l'orizzonte dell'Universo ma in un certo periodo cresce molto rapidamente. *Questa nota l'ho scritta parafrasando quello che c'era scritto nei miei appunti che riporto testualmente: “perché diminuisce? perché è COMOVENTE cioè noi siamo sul $\dot{g}$ sistema di rif. in espansione con l'universo ?”*

¹⁴“che lavoro schifoso!” “...potrebbe andar peggio!” “e come?” “beh.. potrebbe piovere!”

in cui, essendo ben lontani dall'equivalenza quando studiamo l'inflazione, possiamo trascurare il termine di curvatura e quindi porre $\Omega_0 = 1$:

$$H^2(t) = H_0^2 \left(\frac{a_0}{a} \right)^2 \left(\frac{a_0}{a} \right)^{1+3w} \Rightarrow H = H_0 \frac{a_0}{a} \left(\frac{a_0}{a} \right)^{\frac{1+3w}{2}}$$

Dunque agli estremi di una delle fasi elencate, indicando con j il primo estremo e con k il secondo¹⁵, possiamo scrivere

$$H_i = H_0 \frac{a_0}{a_i} \left(\frac{a_0}{a_i} \right)^{\frac{1+3w}{2}}$$

$$H_f = H_0 \frac{a_0}{a_f} \left(\frac{a_0}{a_f} \right)^{\frac{1+3w}{2}}$$

e mettendole a rapporto troviamo la relazione che intercorre tra due momenti nella vita dell'Universo, durante la stessa fase e quindi con lo stesso w :

$$\frac{H_i a_i}{H_f a_f} = \left(\frac{a_i}{a_f} \right)^{-\frac{1+3w}{2}} \quad (5.18)$$

Ora, la richiesta che sia

$$r_H(t_i) = c \frac{a_0}{\dot{a}} \gg r_H(t_0) = c \frac{a_0}{\dot{a}_0} = \frac{c}{H_0}$$

si traduce nella condizione

$$H_0 a_0 \gg \dot{a}_i = H_i a_i$$

$$H_0 a_0 \gg H_i a_i \quad (5.19)$$

Dividendo tutto per $H_f a_f$ trovo

$$\underbrace{\frac{H_i a_i}{H_f a_f}}_{w < -1/3} \ll \underbrace{\frac{H_0 a_0}{H_f a_f}}_{???} = \underbrace{\frac{H_0 a_0}{H_{eq} a_{eq}}}_{w=0} \underbrace{\frac{H_{eq} a_{eq}}{H_f a_f}}_{w=1/3}$$

Ho moltiplicato e diviso per $H_{eq} a_{eq}$ per avere tutti rapporti tra quantità con lo stesso valore di w . Applico ora la (5.18)

$$\left(\frac{a_i}{a_f} \right)^{-\frac{1+3w}{2}} \ll \left(\frac{a_0}{a_{eq}} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{a_{eq}}{a_f} \right)^{-1}$$

Eleviamo tutto alla seconda e, poichè l'Universo è in espansione e quindi ci aspettiamo $a_f > a_i$, invertiamo i rapporti

$$\left(\frac{a_f}{a_i} \right)^{-(1+3w)} \gg \left(\frac{a_0}{a_{eq}} \right)^1 \left(\frac{a_{eq}}{a_f} \right)^2$$

Ora, poichè $\frac{a_0}{a_{eq}} = 1 + z_{eq} \approx z_{eq}$ (con $z_{eq} \gg 1$), e poichè

¹⁵Ad esempio nella fase dell'inflazione $j = i$ e $k = f$.

$$\frac{a_{eq}}{a_f} = \left(\frac{T_{eq}}{T_f} \right)^{-1} = \left(\frac{T_{eq}}{T_P} \frac{T_P}{T_f} \right)^{-1}$$

con $T_P \approx 10^{32} K$ e $T_{eq} = T_0(1 + z_{eq}) \approx 10^4$ dove T_0 è la temperatura oggi, abbiamo

$$\left(\frac{a_f}{a_i} \right)^{-(1+3w)} \gg 10^{60} z_{eq}^{-1} \left(\frac{T_f}{T_P} \right)^2 \quad (5.20)$$

Si definisce quindi il **numero di e -folding**, $\mathcal{N}$, che misura di quanti ordini di grandezza in base e è aumentata la scala dell'Universo durante la fase inflazionaria:

$$\mathcal{N} := \ln \left(\frac{a_f}{a_i} \right) \quad (5.21)$$

Il risultato (5.20) richiede che $\mathcal{N}$ dovrebbe essere

$$\mathcal{N} \gg 60 \frac{2.3 + \frac{1}{30} \ln \left(\frac{T_f}{T_P} \right) - \frac{1}{60} \ln z_{eq}}{|1 + 3w|}$$

$$\mathcal{N} \gg 60$$

Questo risultato ci dice che, per risolvere il problema dell'orizzonte cosmologico, l'Universo deve passare per una fase di inflazionaria di espansione accelerata, con $w = -1/3$, che duri per un tempo sufficiente ad accrescere il parametro di espansione $a(t)$ di una quantità molto maggiore di e^{60} ; cioè di almeno 60 ordini di grandezza in scala logaritmica naturale. Ricordando comunque che questo numero dipende dalla temperatura dell'Universo all'inizio dell'inflazione, $t = t_i$.

Co sto triplo carpiato tra l'altro risolviamo anche il problema dei monopoli magnetici che si diluiscono molto in fretta...

Vediamo ora come varia il parametro di espansione durante il periodo inflativo. Dalla radice della Seconda Equazione di Friedmann nella forma

$$\dot{a} = \frac{d a}{d t} = H_0 \left(\frac{a_0}{a} \right)^{\frac{1+3w}{2}}$$

otteniamo, integrando nel periodo $t_i < t < t_f$

$$\int_{a_i}^a a^{\frac{1+3w}{2}} da = a^{\frac{3(1+w)}{2}} \Big|_{a_i}^a = \int_{t_i}^{t_f} H_0 a_0^{\frac{1+3w}{2}} dt$$

Distinguiamo quindi tra tre regimi possibili per l'inflazione, dipendentemente dal valore che assume la costante w :

- **sub-inflazione**, modello dell'inflazione a legge di potenza: $a(t) \propto t^{\frac{2}{3(1+w)}}$, per $-1 < w < -1/3$;
- **inflazione standard**, modello dell'inflazione esponenziale: $a(t) \propto e^{t/\tau}$ (con $\tau = 1/H_i$), per $w = -1$;
- **super-inflazione**: $a(t) \propto (t_a - t)^{\frac{2}{3(1+w)}}$, per $w < -1$.

Si può anche verificare che la condizione di inflazione può essere espressa:

$$\ddot{a} = a(H^2 + \dot{H}) > 0$$

da cui si vede quindi che:

- **sub-inflazione**, per $\dot{H} < 0$;
- **inflazione standard**, per $\dot{H} = 0$;
- **super-inflazione**, per $\dot{H} > 0$.

5.4.4 Problema della Piattezza dell'Universo o Problema dell'Età

In un'epoca molto vicina al Big-Bang, nella quale le energie sono abbastanza elevate da avere l'unificazione delle 4 forze fondamentali, si può ragionare anche solo in termini di gravità. Abbiamo visto che le soluzioni possibili delle Equazioni di Friedmann prevedono 3 possibilità circa la geometria dell'Universo: caso chiuso, aperto, piatto. Poichè l'unico tempo scala impresso nelle condizioni iniziali dell'Universo primordiale è il tempo di Planck e se la soluzione fosse quella di Universo aperto si potrebbe “rozzamente” affermare che anche il tempo tipico di ricollasso sia dell'ordine del tempo di Planck. Questo ragionamento ci porta ad escludere la possibilità di un Universo chiuso.

Ragioniamo allora in termini di Universo aperto e, anziché utilizzare il tempo, cronometrassimo l'evoluzione utilizzando la temperatura. Abbiamo infatti visto che la temperatura della radiazione va come $T_r \propto a^{-1}$ (e poichè non c'è ancora stato il disaccoppiamento delle forze fondamentali, a maggior ragione le diverse componenti dell'Universo sono tutte accoppiate). In questo modo l'età dell'Universo corrisponde ad una determinata temperatura della radiazione. In questo senso, ad esempio, l'età dell'Universo oggi è di $T_{CMB} = 2.7K$, confrontandola con il t_P possiamo scrivere

$$\frac{a(t)}{a(t_P)} = \frac{t}{t_P} = \frac{T_P}{T}$$

Questo mi permette di fissare il cronometro: t_0 è il tempo in cui l'Universo raggiunge una temperatura di $2.7K$:

$$t_0 = \frac{T_P}{T_0} t_P = \frac{10^{33}}{2.7} 10^{-43}[s] \approx 10^{-11}s$$

Questo significa che, se l'Universo fosse aperto, dal tempo di Planck avrebbe impiegato $10^{-11}s$ per scendere alla temperatura di $2.7K$, che si sarebbe quindi dovuta mantenere costante fino ad oggi.

Questo ci dice che l'unico modo per giustificare l'età dell'Universo è quello di prendere $\Omega_0 = 1$, cioè il caso di Universo perfettamente piatto, ma questo è estremamente improbabile: tra tutti i semi-infiniti valori che può assumere la densità, avrebbe esattamente quello che discrimina tra apertura e chiusura.

Vediamo anche un'altro modo per esprimere questo problema in maniera più formale. Abbiamo definito il parametro di densità come $\Omega(z) := \frac{\rho(z)}{\rho_{crit}(z)}$ con $\rho_{crit}(z) = \frac{3H^2(z)}{8\pi G}$, che evolve con il redshift tornando al valore unitario in tutti e tre i casi possibili di Universo quando ci si avvicina al Big-Bang (Figura 2.4 nella Sezione 2.5), come dettato dalla (2.56) che riportiamo qui per comodità:

$$\Omega_w^{-1}(z) - 1 = \frac{\Omega_0^{-1} - 1}{(1+z)^{1+3w}} \quad (5.22)$$

con $w > -1/3$. Se prendiamo ora l'equazione per l'evoluzione della densità $\rho_w(z) = \rho_{0,w}(1+z)^{3(1+w)}$, possiamo riscrivere la (5.22)

$$(\Omega^{-1}(z) - 1)\rho(z)a^2 = (\Omega_0^{-1} - 1)\rho_0 a_0^2 = cost \quad (5.23)$$

Senza inflazione lo scenario evolutivo dell'Universo è ben descritto (senza inflazione) da un modello radiativo, $w = 1/3$ fino a z_{eq} , e da un modello dominato dalla materia con $w = 0$ da z_{eq} ad oggi. Ricordando le formule

$$\rho = \rho_{eq} \left(\frac{a_{eq}}{a} \right)^4 \quad (\text{per } z > z_{eq}); \quad \rho = \rho_0 \left(\frac{a_0}{a} \right)^3 \quad (\text{per } z < z_{eq})$$

dalla (5.22) possiamo ottenere facilmente la relazione tra Ω (corrispondente ad un tempo $t \ll t_{eq}$ quando la temperatura è T) ed Ω_0 :

$$\Omega^{-1}(z) - 1 = (\Omega_0^{-1} - 1)(1+z_{eq})^{-1} \frac{T_{eq}}{T} = (\Omega_0^{-1} - 1)10^{-60} \left(\frac{T_P}{T} \right)^2$$

Se prendiamo $|\Omega_0^{-1} - 1| \approx 1$, questa implica che Ω deve essere stato estremamente vicino al valore unitario durante le epoche primordiali. Ad esempio, a t_P abbiamo $|\Omega_P^{-1} - 1| \approx 10^{-60}$. Ci si chiede quindi come sia possibile che il parametro di densità abbia un valore così vicino all'unità¹⁶. Tra l'altro con 'sta fisima abbiamo visto che il problema dell'età prima formulato è un problema di piattezza, infatti abbiamo che in un'epoca prossima al Big-Bang, tutti gli universi si comportano come un universo piatto, Ω_P differisce dall'unità di un valore dell'ordine di 10^{-60} che, per quanto piccolo, discrimina tra Universo a curvatura positiva o negativa. Non bisogna dimenticare però che il valore del parametro di densità attuale è vicinissimo a 1 e, per la conservazione della curvatura, se il valore iniziale si discostava dal valore piatto, oggi avremmo un Universo con curvatura di 59 ordini di grandezza maggiore o minore di quello per Universo piatto (in positivo o negativo, nel senso che per universo chiuso avremmo $\Omega = 10^{59}$ e per Universo aperto 10^{-59} .)

Vediamo ancora un altro modo per formulare il problema dell'età (o della piattezza). Prendiamo la Seconda Equazione di Friedmann nella forma

$$\frac{\dot{a}^2}{a_0^2} - \frac{8\pi G}{3} \rho \frac{a^2}{a_0^2} = \frac{Kc}{a_0^2}$$

Moltiplico il primo termine al primo membro per $\frac{a^2}{a_0^2}$ e sostituisco a $\frac{8\pi G}{3} = \frac{H^2}{\rho_{crit}}$ (dalla definizione di densità critica), ho quindi

$$\begin{aligned} H^2 \frac{a^2}{a_0^2} - \frac{H^2}{\rho_{crit}} \rho \frac{a^2}{a_0^2} &= \frac{Kc}{a_0^2} \\ H^2 \frac{a^2}{a_0^2} (1 - \Omega) &= -\frac{Kc}{a_0^2} \end{aligned} \quad (5.24)$$

¹⁶Anche negli anni '60 si sapeva che doveva essere $0.1 < \Omega_0 < 10$, cioè che al massimo $\Omega(t_P)$ differiva dall'unità di un valore 10^{-59} .

Questa mi dice che l'Universo evolve mantenendo costante il primo membro dell'equazione sopra (poichè $\frac{Kc}{a_0^2}$ è costante). Vale quindi l'uguaglianza

$$H_0^2(1 - \Omega_0) = H(z)^2(1 - \Omega(z))\left(\frac{a}{a_0}\right)^2 = H(z)^2(1 - \Omega(z))\left(\frac{T_0}{T}\right)^2$$

dove siamo passati alla temperatura grazie all'identità $Ta = T_{0,r}a_0$, con $T_{0,r} = T_0 = 2.7K$. Abbiamo allora che la (5.24) diventa

$$\frac{H(z)^2(1 - \Omega(z))}{T^2(z)} = -\frac{Kc}{a_0^2 T_0^2} = \text{cost} \quad (5.25)$$

Posso moltiplicare questa costante per $(\hbar/K_B)^2$ al fine di adimensionalizzarla, ottenendo la costante adimensionale

$$\varepsilon(T) := \left(\frac{\hbar}{K_B}\right)^2 H_0^2 \frac{|\Omega_0 - 1|}{T_0^2} = \left(\frac{\hbar}{K_B}\right)^2 \frac{|K|c}{a_0^2 T_0^2} \quad (5.26)$$

Sostituendo le costanti note quindi

$$\varepsilon(T) = |\Omega_0 - 1| 10^{-58} < 10^{-57}$$

Quindi l'Universo sta evolvendo mantenendo costante $\varepsilon(T)$ che, considerata l'adimensionalità, è sicuramente un numero estremamente piccolo. Vediamo di capire però cos'è questa quantità, calcoliamoci l'entropia adimensionale dell'Universo:

$$\sigma_U = \frac{S_R}{K_B} = \left(\frac{K_B T a}{\hbar c}\right)^3 \approx |\varepsilon(T)|^{-3/2} > 10^{86}$$

Ovvero la costante $\varepsilon(T)$ è legata all'entropia dell'Universo e ci dice che, affinché possa avere un valore così piccolo, il numero di particelle all'interno dell'orizzonte dovrà essere estremamente grande¹⁷(paragonato ad esempio al valore unitario che trovavamo al tempo di Planck.). Quindi il problema dell'età può essere visto come un problema di piattezza che a sua volta può essere tradotto in un problema di entropia, che però siamo in grado di risolvere introducendo anche questa volta il concetto di inflazione.

La Soluzione Inflazionaria

Ammettiamo che sia esistito un periodo di espansione accelerata dell'Universo in cui $w < -1/3$, tra t_i e t_f . Come già fatto nella Sezione 5.4.3, dividiamo la storia dell'Universo nei tre intervalli (t_i, t_f) , (t_f, t_{eq}) e (t_{eq}, t_0) , dove $\rho \propto a^{3(1+w_{i,j})}$, con $w_{i,f} = -1/3$, $w_{f,eq} = 1/3$ e $w_{eq,0} = 0$, rispettivamente. Dalla (5.25) troviamo

$$(\Omega_i^{-1} - 1)\rho_i a_i^2 = (\Omega_f^{-1} - 1)\rho_f a_f^2 = (\Omega_{eq}^{-1} - 1)\rho_{eq} a_{eq}^2 = (\Omega_0^{-1} - 1)\rho_0 a_0^2$$

così che

$$\frac{\Omega_i^{-1} - 1}{\Omega_0^{-1} - 1} = \frac{\rho_0 a_0^2}{\rho_i a_i^2} = \frac{\rho_0 a_0^2}{\rho_{eq} a_{eq}^2} \frac{\rho_{eq} a_{eq}^2}{\rho_f a_f^2} \frac{\rho_f a_f^2}{\rho_i a_i^2}$$

da cui, in maniera simile a quanto fatto nella Sezione 5.4.3, ci da

¹⁷Entropia $\longleftrightarrow$ numero di particelle.

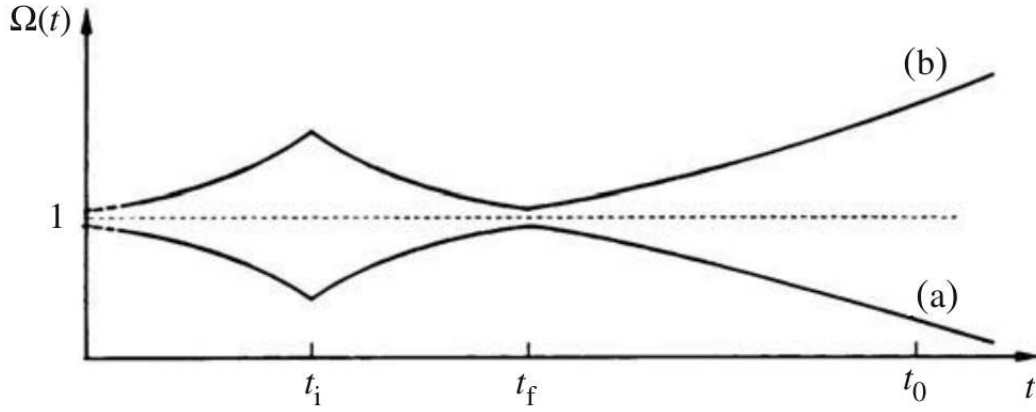


Figura 5.7: Evoluzione di Ωt per un Universo aperto (a) e un Universo chiuso (b) caratterizzata dai tre periodi $(0, t_i)$, (t_i, t_f) e (t_f, t_0) . Durante il primo e l'ultimo periodo $p/(\rho c^2) = w > -1/3$ (espansione decelerata), mentre nel secondo periodo $w < -1/3$ (espansione accelerata). Se il periodo inflazionario è sufficientemente drammatico (come visto nel caso dell'orizzonte cosmologico), la divergenza per $t \nearrow$ delle traiettorie di (a) e (b) da $\Omega = 1$ è ritardata fino ed oltre t_0 .

$$\left(\frac{a_f}{a_i}\right)^{-(1+3w)} = \left(\frac{\Omega_i^{-1} - 1}{\Omega_0^{-1} - 1}\right) \left(\frac{a_0}{a_{eq}}\right) \left(\frac{a_{eq}}{a_f}\right)^2$$

Con un po' di magheggi, seguendo il filo di quanto fatto per la (5.20), otteniamo

$$\left(\frac{a_f}{a_i}\right)^{-(1+3w)} = \left(\frac{\Omega_i^{-1} - 1}{\Omega_0^{-1} - 1}\right) 10^{60} z_{eq}^{-1} \left(\frac{T_f}{T_P}\right)^2 \quad (5.27)$$

e possiamo assumere che il problema della piattezza sia risolto fintanto che

$$\frac{\Omega_i^{-1} - 1}{\Omega_0^{-1} - 1} \geq 1$$

ovvero fintanto che Ω_0 non è più vicino all'unità di quanto lo fosse Ω_i . Questa disuguaglianza, espressa in termini del numero di e -folding, diventa

$$\mathcal{N} \geq 60 \frac{2.3 + \frac{1}{30} \ln\left(\frac{T_f}{T_P}\right) - \frac{1}{60} \ln z_{eq}}{|1 + 3w|}$$

Notare che in questo caso la relazione è meno stringente di quella ottenuta per il problema dell'orizzonte in cui si richiedeva che fosse $\gg$ e non solo $\geq$. Quindi quanto detto per il problema dell'orizzonte cosmologico risolverebbe automaticamente anche il problema della piattezza.

In Figura 5.7 vediamo il comportamento del parametro di densità in questo scenario.

Capitolo 6

I Modelli dell'Inflazione

Ci avventuriamo nel fantastico mondo della modellistica dell'inflazione, che utilizzeremo per risolvere i tre grandi problemi del modello del Big-Bang visti nel capitolo precedente: Orizzonte, Piattezza, Monopoli Magnetici. Abbiamo visto come risolvendo il primo richiedendo che sia $\mathcal{N} \gg 60$ si risolvono automaticamente anche gli altri due. L'inflazione così impostata predice $\Omega_0 - 1 \approx 0$. Ci manca però un modello inflazionario solido e convincente.

I primi modelli sono stati sviluppati da Alan Guth nei primi anni '80 del 20esimo secolo, analizzando l'importantissima **transizione di fase GUT** che avviene quando l'Universo primordiale scende a $T_{GUT} \approx 10^{15} GeV$ portando al disaccoppiamento della forza nucleare forte dalla forza elettrodebole. Guth sosteneva infatti che l'inflazione fosse avvenuta durante questa transizione, che doveva essere del primo tipo (come illustrato nella Sezione 5.2). Poichè l'Universo, come ogni sistema quando passa attraverso una transizione di fase, non è all'equilibrio in questa fase, diverse leggi di conservazione qui possono essere violate, come la conservazione del numero barionico. È dunque in questo periodo che si pensa sia avvenuta anche la formazione dell'asimmetria barioni-antibarioni.

6.1 Modello di Guth

Assumendo che la transizione di fase GUT sia di primo tipo possiamo scrivere la Lagrangiana per il campo scalare ϕ che costituisce il parametro d'ordine della transizione (vedremo che tale parametro nella teoria generale dell'inflazione è detto **inflatone**)

$$\mathcal{L}(\phi) = \frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi, T) \quad (6.1)$$

Dove $V(\phi, T)$ è il “potenziale effettivo” che svolge il mestiere dell'energia libera ed è funzione di ϕ e della temperatura¹. Il primo termine al secondo membro è $\dot{\phi}^2/2$ è il termine cinetico della Lagrangiana. Al campo scalare ϕ posso associare una **densità di energia effettiva**

$$\rho_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi, T) \quad (6.2)$$

ed una **pressione effettiva**

$$p_\phi \equiv \mathcal{L}(\phi) = \frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi, T) \quad (6.3)$$

¹E di conseguenza del tempo

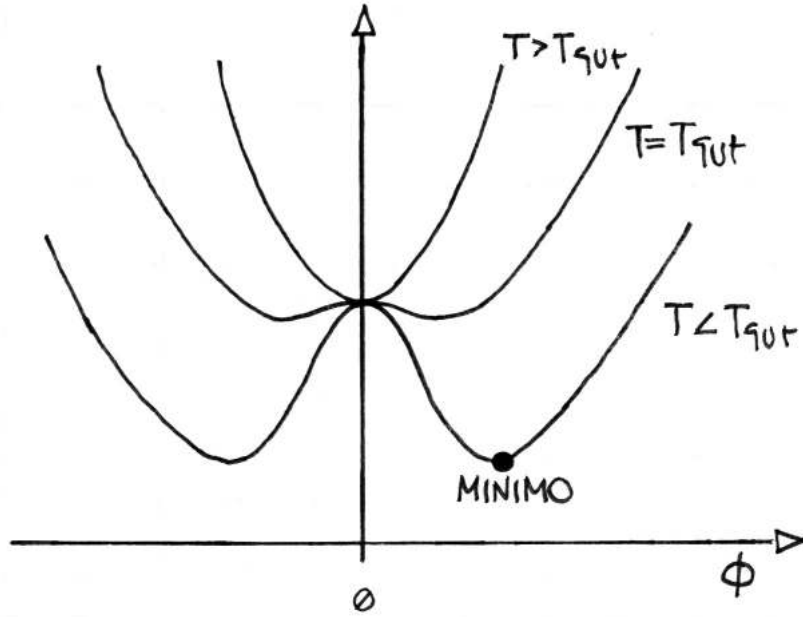


Figura 6.1: Studio di funzione del potenziale effettivo per tre diversi valori fissati di T , cioè per temperature maggiori, uguali o minori di T_{GUT} , corrispondenti a prima, durante e dopo la transizione di fase in termini di tempo

Raggiunti i $10^{15} GeV$ il sistema è in equilibrio metastabile finché la temperatura non decresce a sufficienza da “accorgersi” dei nuovi minimi (Figura 6.1).

Come già descritto in Sezione 5.2 è solo dopo che la temperatura scende a sufficienza al di sotto di T_{GUT} che il sistema si “accorge” dei nuovi minimi, poichè prima esiste una barriera di potenziale. La differenza di energia dalla posizione iniziale in $\phi = 0$ a quella nei due minimi in $\pm\phi_{min}$ è finita. Tale energia viene rilasciata quando il sistema si sposta nella nuova posizione di equilibrio e riscalda l’ambiente. Come già detto anche l’oscillazione del sistema attorno alla nuova posizione di equilibrio provoca il rilascio di energia.

Studiamo ora la dinamica del campo ϕ prendendo le Equazioni di Friedmann e considerando come componenti la radiazione e ϕ , trascurando così la materia che abbiamo già visto essere ininfluenza in quest’epoca (assumiamo le unità naturali, $c = \hbar = 1$)

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3}[\rho_\phi + \rho_R - 3(p_\phi + p_R)] \quad (6.4)$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}(\rho_\phi + \rho_R) - \frac{L}{a^2} \quad (6.5)$$

Ricordando che $p = \rho/3$ (poichè abbiamo posto $c = 1$) in questa fase in cui tutte le componenti sono ancora accoppiate e quindi l’equazione di stato dipende dalla costante $w = 1/3$. Sostituiamo nella (6.4) il valore della densità di energia del campo ϕ , espressa dalla (6.2) e quella di pressione della (6.3):

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left[\frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi, T) + \rho_R - 3\frac{\dot{\Phi}^2}{2} - 3V(\phi, T) + 3\frac{\rho_R}{3} \right]$$

$$\ddot{a} = \frac{8\pi G}{3}[V - \rho_R \dot{\phi}^2]$$

L'evoluzione dell'inflatone ϕ è data dall'equazione di Eulero-Lagrange del moto per un campo scalare²

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial(\mathcal{L}a^3)}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial(\mathcal{L}a^3)}{\partial \phi} &= 0 \\ \frac{d}{dt}(\dot{\phi}a^3) + a^3 \frac{\partial V}{\partial \phi} &= 0 \\ a^3 \ddot{\phi} + \dot{\phi} 3a^2 \dot{a} + a^3 \frac{\partial V}{\partial \phi} &= 0 \end{aligned}$$

che, sostituendo $a^2 \dot{a} = a^3 \frac{\dot{a}}{a} = a^3 H$ e dividendo tutto per a^3 , si può scrivere

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{\partial V(\phi, T)}{\partial \phi} = 0 \quad (6.6)$$

La(6.6) è un'equazione di Klein-Gordon ed è simile all'equazione che descrive il moto di una pallina³ che si muove sotto la forza $-\partial V/\partial \phi$ e sottoposta ad una frizione descritta dal termine di viscosità proporzionale a $3H$. La (6.6) ci descrive come il sistema si sposta nella nuova posizione di equilibrio durante la transizione di fase.

Poichè vogliamo che questo processo di transizione duri molto (come visto nella Sezione 5.4.3), imporremo delle **condizioni di lento rotolamento**⁴. Affinché il rotolamento di una pallina sia lento le possibilità sono due: o il termine viscoso è molto importante, oppure il potenziale è molto piatto (ovvero tale che la sua derivata rispetto a ϕ sia molto piccola). Essendo questa situazione esattamente analoga alla nostra, il nome “lento rotolamento” è mutuato. Tali condizioni sono

$$\dot{\phi} \ll V(\phi) \quad (6.7)$$

nella (6.1) che si legge “il termine cinetico deve essere trascurabile rispetto al termine potenziale”, e la

$$\ddot{\phi} \approx 0 \quad (6.8)$$

nella (6.6), vogliamo cioè che il “moto” non sia accelerato. Con queste condizioni potremo avere un periodo di inflazione sufficientemente prolungato nel tempo.

Vogliamo ora vedere che con queste condizioni abbiamo un'espansione accelerata dell'Universo, riprendiamo la (6.5), Seconda Equazione di Friedmann con il termine inflativo. Il termine ρ_R è una densità di energia, va quindi come a^{-4} , il termine di curvatura invece va come a^{-2} . Se confrontati con il termine in ρ_ϕ che è quasi costante (abbiamo imposto che vari molto lentamente), è evidente che in un'espansione rapida gli altri due termini diventano rapidamente trascurabili. La (6.5) può essere quindi approssimata alla

²La $\mathcal{L}$ definita sopra è una densità di Lagrangiana, dobbiamo quindi moltiplicarla per il volume a^3 , se vogliamo la Lagrangiana totale del sistema.

³Il termine in $\ddot{\phi}$ è infatti analogo ad una accelerazione mentre la derivata parziale di V è analogo ad una forza, dissipata dal termine dipendente da $\dot{\phi}$, analogo ad un attrito viscoso, appunto.

⁴Se non si fosse capito in questo modello l'inflazione corrisponde alla transizione tra le due posizioni di equilibrio, da metastabile a stabile. Quindi se voglio un'inflazione che duri parecchio ho bisogno di una transizione che sia molto lenta.

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \approx \frac{8\pi G}{3} \rho_\phi \quad (6.9)$$

Per la condizione (6.7) la (6.2) mi dà $\rho_\phi \approx V(\phi, T)$, quindi la (6.9) la riscriviamo

$$\begin{aligned} \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 &\approx \frac{8\pi G}{3} V(\phi, T) \\ \frac{\dot{a}}{a} = \frac{1}{a} \frac{da}{dt} &= \sqrt{\frac{8\pi G V}{3}} = \text{cost} \\ \frac{da}{a} &\approx \sqrt{\frac{8\pi G V}{3}} dt \end{aligned} \quad (6.10)$$

La integriamo

$$\ln a \propto \exp\left(\sqrt{\frac{8\pi G V}{3}} t\right)$$

la radice ha le dimensioni di un tempo, quindi definiamo

$$\tau := \sqrt{\frac{3}{8\pi G V}} \sim 10^{-34} s$$

da cui quindi

$$a(t) = \exp\left(\frac{t}{\tau}\right) \quad (6.11)$$

ovvero, durante il lento rotolamento, **l'espansione è una funzione esponenziale del tempo**. Poiché poi l'esponenziale rimane sempre positivo si ha che

$$\ddot{a} > 0 \quad \forall t$$

cioè siamo in presenza di un'espansione accelerata.

Per misurare la durata dell'inflazione si usa il numero di *e*-folding: l'equazione di Klein-Gordon con le condizioni di lento rotolamento diventa

$$3H\dot{\phi} + \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0$$

da cui, isolando $\dot{\phi}$

$$\dot{\phi} = -\frac{1}{3H} \frac{\partial V}{\partial \phi} \quad (6.12)$$

e dalla (6.10) otteniamo quindi

$$H = \frac{d}{dt} \frac{da}{a} = \frac{d \ln a}{dt} \approx \sqrt{\frac{8\pi G V}{3}}$$

nella quale effettuiamo il cambiamento di variabili $dt = \frac{d\phi}{\dot{\phi}}$

$$\dot{\phi} \frac{d \ln a}{d \phi} \approx \sqrt{\frac{8\pi G V}{3}}$$

e sostituiamo $\dot{\phi}$ con la (6.12)

$$\begin{aligned} -\frac{1}{3H} \frac{\partial V}{\partial \phi} \frac{d \ln a}{d \phi} &\approx \sqrt{\frac{8\pi G V}{3}} \\ d \ln a &\approx -\left(\frac{\partial V}{\partial \phi}\right)^{-1} 3H \sqrt{\frac{8\pi G V}{3}} \equiv -\left(\frac{\partial V}{\partial \phi}\right)^{-1} 3 \sqrt{\frac{8\pi G V}{3}} \sqrt{\frac{8\pi G V}{3}} d\phi \\ d \ln a &\approx -\left(\frac{\partial V}{\partial \phi}\right)^{-1} 8\pi G V d\phi \\ d \ln a &\approx -\left(\frac{\partial \ln V}{\partial \phi}\right)^{-1} 8\pi G d\phi \end{aligned}$$

Integriamo l'ultima nell'intervallo in cui avviene l'inflazione

$$\begin{aligned} \mathcal{N} = \int_{a_i}^{a_f} d \ln a &\approx -8\pi G \int_{\phi_i}^{\phi_f} \left(\frac{\partial \ln V(\phi, T)}{\partial \phi}\right)^{-1} d\phi \\ \mathcal{N} = \ln \frac{a(t_f)}{a(t_i)} &\approx -8\pi G \int_{\phi_i}^{\phi_f} \left(\frac{\partial \ln V(\phi, T)}{\partial \phi}\right)^{-1} d\phi \end{aligned} \quad (6.13)$$

Il **numero di e-folding** determina la durata dell'inflazione. L'espressione trovata (6.13) ci dice che per avere un numero di e-folding elevato abbiamo bisogno di un potenziale quanto più piatto (nell'integrale la derivata parziale del potenziale è alla -1 , se V è piatto il differenziale tende a zero e il suo inverso è molto elevato). Anche in questo caso quindi ho il risultato sperato a patto di imporre le condizioni di lento rotolamento.

Quando il sistema arriva nel minimo avremo delle oscillazioni smorzate che portano via energia al sistema. Queste oscillazioni corrispondono fisicamente alla formazione delle particelle. Abbiamo infatti già insistito sul fatto che in questa fase siamo ancora (e per l'ultima volta) in condizioni GUT. Questa teoria viene detta **no cosmic hair**⁵, non solo perchè fila tutto liscio ma principalmente perchè durante l'espansione accelerata avviene tutto in maniera uniforme?

Il fenomeno di riscaldamento che avviene mentre si formano le particelle è detto **re-heating** e deve essere sufficiente a spiegare l'aumento dell'entropia, ma non abbastanza da raggiungere nuovamente i $10^{15} GeV$, servono quindi condizioni stringenti.

Il modello in ogni caso non dà condizioni sulla posizione dei minimi; in passato venivano posti a $V = 0$ per avere che l'energia di uscita dalla transizione di fase fosse nulla, in modo da evitare di dover supporre l'esistenza di un'energia misteriosa che pervade l'Universo. Attualmente però si è accettata l'esistenza di un termine aggiuntivo nelle Equazioni di Friedmann dipendente da una costante cosmologica che interpretiamo come energia del vuoto, non siamo interessati quindi ad avere minimi nulli anzi, ce li attendiamo con un valore tale da giustificare $\Omega_\Lambda \approx 0.7$. Ecco, quel valore non è giustificato. I minimi che otteniamo sono ad energia troppo bassa per giustificare un contributo così importante.

Poco dopo che il Signor Guth presentò il suo modello, ci si accorse che presentava diversi problemi, di cui quello della costante cosmologica è uno. Non è ovvio inoltre che il calore latente liberato nella transizione sia sufficiente a formare tutta la materia che osserviamo. Il modello poi non è in grado di creare delle bolle di spazio in espansione sufficientemente grandi da contenere l'orizzonte dell'Universo necessario per la fase evolutiva successiva.

⁵“Non c'è un pelo” (cit. Moska)

Per questi motivi il modello di Guth, noto ora come **old inflation**, venne abbandonato⁶. Venne poi sviluppato un altro modello, al secolo **new inflation**, in cui la transizione di fase considerata era del secondo tipo. Questo modello alternativo riusciva a prevedere delle regioni in connessione causale sufficientemente grandi ma peccava del calore latente necessario alla formazione in massa dei barioni. Perchè tale formazione fosse possibile era necessario settare i parametri del new inflation molto accuratamente, ma a noi il fine-tuning non c'è mai piaciuto.

I modelli di inflazione più moderni non si appoggiano al concetto di transizione di fase e vengono detti modelli caotici di Linde. Indovina un po' di che parliamo nella prossima sezione?

6.2 Inflazione Caotica di Linde

La trattazione del paradigma dell'inflazione dei modelli del russo Linde è molto apprezzata ed usata ancora oggi. Ha il vantaggio di essere completamente slegata dalla necessità di una transizione di fase. Necessita di un campo scalare ϕ generato da un potenziale $V(\phi, T)$ sufficientemente grande da avere l'energetica necessaria per riempire l'Universo di particelle. La dinamica è ancora descritta dall'equazione di Klein-Gordon

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{\partial V(\phi, T)}{\partial \phi} = 0 \quad (6.14)$$

dove, come prima, V è il potenziale dell'inflatone e ϕ l'inflatone, un campo scalare opportuno. Abbiamo ancora la Seconda Equazione di Friedmann ma poniamo le unità naturali $c = G = \hbar = 1$ e assumiamo $K = 0$ perchè siamo vicini al Big-Bang e quindi l'Universo può essere considerato piatto

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = H^2 = \frac{8\pi}{3}\rho \quad (6.15)$$

Abbiamo già visto dalla (6.2) come si scrive la densità di energia in questo contesto, la (6.15) diventa quindi

$$H^2 = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi, T) \right) \quad (6.16)$$

Facciamo un esempio classico (e semplice). Da qui in avanti useremo per comodità le unità Planckiane (e.g. $m = m/m_P$) e prenderemo un potenziale quadratico

$$V(\phi) = \frac{m^2 \phi^2}{2} \quad (6.17)$$

Con questo potenziale la (6.16) diventa

$$H^2 = \frac{4\pi}{3} (\dot{\phi}^2 + m^2 \phi^2)$$

$$H = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} (\dot{\phi}^2 + m^2 \phi^2)^{1/2} \quad (6.18)$$

⁶In realtà comunque non fu Guth il babbo dell'inflazione come si dice di solito ma fu il russo Starobinski, e Compagni. Solo che in quel periodo si era in piena guerra fredda e i russi scrivevano in francese per non far contenti gli americani, quindi non se li leggeva nessuno.

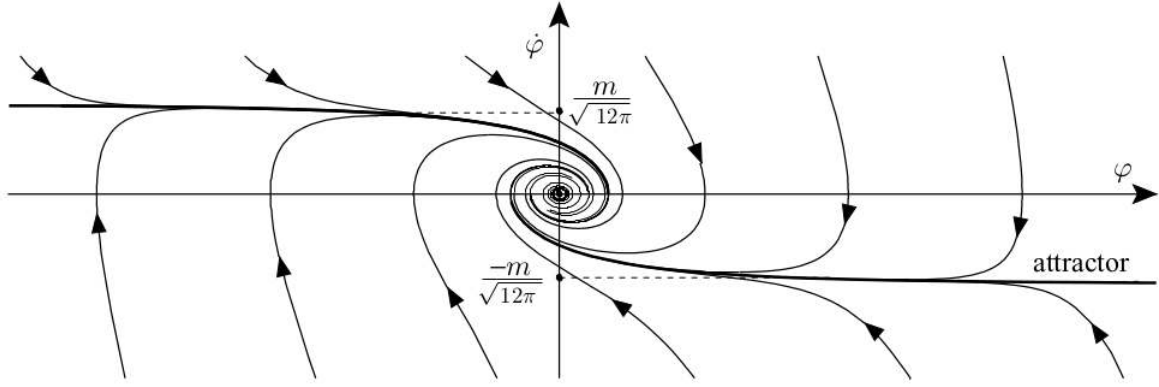


Figura 6.2: Diagramma dell'evoluzione dinamica dell'inflatone nello spazio delle fasi.

La (6.14) diventa quindi

$$\ddot{\phi} + 3\dot{\phi}\sqrt{\frac{4\pi}{3}}(\dot{\phi}^2 + m^2\phi^2)^{1/2} + m^2\phi = 0 \quad (6.19)$$

che è un'equazione differenziale non lineare del II ordine e può essere ridotta ad un'equazione differenziale del I ordine per $\dot{\phi}(\phi)$. Possiamo scrivere

$$\ddot{\phi} = \dot{\phi} \frac{d\dot{\phi}}{d\phi}$$

con la quale, la (6.19) diventa

$$\dot{\phi} \frac{d\dot{\phi}}{d\phi} = -\sqrt{12\pi}(\dot{\phi}^2 + m^2\phi^2)^{1/2}\dot{\phi} + m^2\phi \quad (6.20)$$

Questa equazione rappresenta l'evoluzione dinamica del campo scalare ϕ e ha il vantaggio che ci consente di studiare le traiettorie dell'inflatone ϕ nello spazio delle fasi. L'equazione (6.20) è quadratica, quindi simmetrica rispetto al centro, si comporta come in Figura 6.2.

Sebbene questo sia il comportamento generale della funzione nello spazio delle fasi, ci concentriamo su un singolo ramo, per chiarezza e perchè a lezione a fare il disegno mi ci sono impegnato un sacco⁷, stacce.

Concentriamoci quindi sulla Figura 6.3 dove distinguiamo tre fasi nell'evoluzione dinamica, le presentiamo qui ma le studieremo accuratamente una ad una.

- **fase (a): caduta verso l'attrattore**, nella prima fase l'inflatone parte da più o meno alti valori di ϕ e da alti valori di $\dot{\phi}$, lo spostamento nello spazio delle fasi avviene in maniera quasi perpendicolare all'asse ϕ (i.e. piccola variazione in ϕ) mentre il valore di $\dot{\phi}$ varia molto fino a raggiungere un valore, qualunque sia il punto di partenza, che poi si mantiene praticamente costante per tutta la fase successiva;
- **fase (b): fase di inflazione**, in questa fase la traiettoria si muove $\approx$ parallelamente all'asse ϕ (i.e. $\dot{\phi} \approx cost$) avvicinandosi all'origine degli assi (i.e. $\phi \searrow$);
- **fase (c): uscita dall'inflazione**, l'inflatone spiraleggia verso il centro, tale processo avviene tramite oscillazioni che portano alla creazione delle particelle.

⁷Cazzo! Il pluralis maiestatis perso!

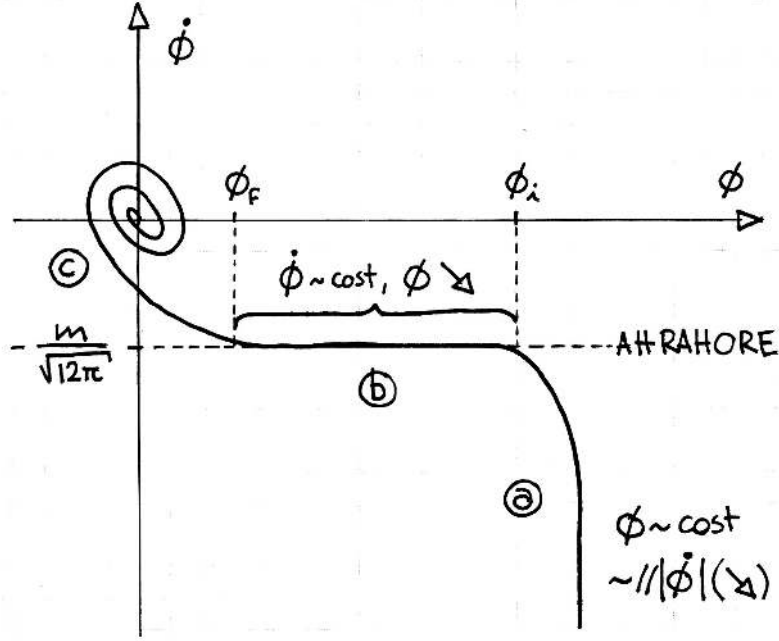


Figura 6.3: Un ramo del diagramma dell'evoluzione dinamica dell'inflatone nello spazio delle fasi. Sono evidenziate i tre andamenti principali.

Come si vede dalla Figura 6.3 ci stiamo limitando per semplicità alla trattazione del secondo quadrante, per simmetria la soluzione sarà valida anche per tutti gli altri casi. Abbiamo $\phi > 0$ e $\dot{\phi} < 0$.

6.2.1 Fase (a): Caduta Verso l'Attrattore

In questa prima fase abbiamo $\dot{\phi}^2 \gg m^2\phi^2$, ovvero il termine cinetico domina su quello potenziale. L'energia potenziale è trascurabile rispetto a quella cinetica. Abbiamo un'equazione di stato di tipo **ultra-hard** ovvero con $w = +1$ e $c_s \approx c$, per giunta per quanto detto sopra avremo

$$\rho_\phi = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V \approx \frac{\dot{\phi}^2}{2} \quad (6.21)$$

$$p_\phi = \frac{\dot{\phi}^2}{2} - V \approx \frac{\dot{\phi}^2}{2}$$

da cui quindi

$$\frac{p_\phi}{\rho_\phi} \approx 1$$

Riscriviamo ora l'equazione per l'evoluzione dinamica (6.20) alla luce delle assunzioni fatte

$$\frac{d\dot{\phi}}{d\phi} = -\sqrt{12\pi}\dot{\phi}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\dot{\phi}} \frac{d\dot{\phi}}{d\phi} &= \sqrt{12\pi} \\
\frac{d\dot{\phi}}{\dot{\phi}} &= \sqrt{12\pi} d\phi \\
\dot{\phi} &= C \exp(\sqrt{12\pi}\phi)
\end{aligned} \tag{6.22}$$

dove ci siamo liberati del segno meno poichè tanto dipende dal quadrante in cui studio todo, C è una costante di integrazione. Quello che capiamo dalla (6.22) è che in questa fase ho una variazione molto veloce (i.e. esponenziale) di $\dot{\phi}$. Vogliamo allora integrare la (6.22) per avere tutto in funzione del tempo

$$\frac{d\phi}{dt} = \dot{\phi} = C \exp(\sqrt{12\pi}\phi)$$

separiamo le variabili e integriamo

$$\begin{aligned}
\int \exp(\sqrt{12\pi}\phi) d\phi &= \int C dt \\
\frac{1}{\sqrt{12\pi}} \exp(\sqrt{12\pi}\phi) &= C t
\end{aligned}$$

Da cui quindi passando ai logaritmi

$$\begin{aligned}
\phi(t) &\propto -\frac{\ln(-C\sqrt{12\pi}t)}{\sqrt{12\pi}} \\
\phi(t) &\propto -\frac{\ln(-C\sqrt{12\pi}) + \ln t}{\sqrt{12\pi}} \\
\phi(t) &= C' - \frac{\ln t}{\sqrt{12\pi}}
\end{aligned} \tag{6.23}$$

e facendone la derivata temporale trovo

$$\dot{\phi}(t) = -\frac{t^{-1}}{\sqrt{12\pi}} \tag{6.24}$$

Le (6.23) e (6.24) ci descrivono il comportamento dell'inflatone nello spazio della fasi nella sua prima fase di evoluzione. Vediamo che ϕ varia molto lentamente rispetto a $\dot{\phi}$. Più precisamente, poichè il termine cinetico è molto più importante rispetto a quello potenziale, abbiamo che $\phi(t)$ varia con il logaritmo del tempo, mentre $\dot{\phi}(t)$ varia con l'inverso del tempo. Questo fa sì che le traiettorie nello spazio delle fasi siano praticamente verticali.

L'evoluzione del fattore di espansione $a(t)$ è dato dalla Seconda Equazione di Friedmann nella forma (6.18) nella quale dovremo implementare le condizioni viste per questa fase evolutiva ovvero la trascurabilità del termine potenziale

$$\begin{aligned}
H^2 &= \frac{\dot{a}^2}{a^2} \approx \frac{4\pi}{3} \dot{\phi}^2 \approx \frac{4\pi}{3} \frac{1}{12\pi} \frac{1}{t^2} \\
H^2 &= \frac{\dot{a}^2}{a^2} \approx \frac{1}{9t^2}
\end{aligned}$$

$$H = \frac{\dot{a}}{a} \equiv \frac{d \ln a}{dt} \approx \frac{1}{3t}$$

$$d \ln a = d \ln t^{1/3}$$

integrate that shit!

$$a(t) \propto t^{1/3} \quad (6.25)$$

e quindi dalla (6.21) con la eq: Linde-07 troviamo che

$$\rho \propto a^{-6} \quad (6.26)$$

Il comportamento delle (6.25) e (6.26) ci piace anche perchè studiando il modello EdS avevamo trovato $a \propto t^{2/3(1+w)}$ ed $\rho \propto a^{-3(1+w)}$. Se in queste equazioni inseriamo $w = 1$ (che è una condizione “figlia” di quella di trascurabilità del termine potenziale) diventano esattamente coincidenti con gli andamenti (6.25) e (6.26), bello quando i torni contano...

Abbiamo quindi imposto una sola condizione $\dot{\phi}^2 \gg V$ che però ci consente di far evolvere naturalmente il sistema diminuendo $\dot{\phi}$ e mantenendo ϕ praticamente invariato.

6.2.2 Fase (b): Inflazione

In questa seconda fase il sistema entra nella vera e propria **fase inflazionaria**. Abbiamo visto che il sistema arriva naturalmente alla retta in (b), si dice che l'equazione differenziale risolutiva (6.20) **offre un attrattore**. Sull'attrattore cerco soluzioni che mi diano traiettorie piatte (i.e. costanti in $\dot{\phi}$), ovvero tali che

$$\frac{d \dot{\phi}}{d \phi} \approx 0$$

Non abbiamo bisogno che sia esattamente zero ma che ci si avvicini! Dunque la (6.20) diventa

$$\sqrt{12\pi}(\dot{\phi}^2 + m^2\phi^2)^{1/2}\dot{\phi} + m^2\phi \approx 0$$

In questo caso, diversamente da quanto abbiamo fatto per la fase (a), assumiamo che nel momento in cui la traiettoria dell'inflatone interseca quella dell'attrattore diventi $m\phi \gg \dot{\phi}$ ovvero il termine cinetico deve essere trascurabile rispetto a quello potenziale, in maniera equivalente alle condizioni di lento rotolamento imposte in Sezione 6.1 (vedremo che questa condizione ci consentirà di ottenere un'inflazione di durata sufficiente). Trascuriamo quindi il termine cinetico

$$\sqrt{12\pi}m\phi\dot{\phi} + m^2\phi \approx 0$$

risolviamo quindi per $\dot{\phi}$ per trovare il valore costante dell'attrattore in $\dot{\phi}$

$$\dot{\phi}_{attr} = -\frac{m}{\sqrt{12\pi}} \quad (6.27)$$

da cui, integrando nel tempo, troviamo l'andamento di ϕ

$$\phi_{attr}(t) = \phi_i - \frac{m}{\sqrt{12\pi}}(t - t_i) \quad (6.28)$$

Supponendo che l'inflazione finisca quando $\phi_f = 0$ potremo scrivere

$$\phi_{attr}(t) = \frac{m}{\sqrt{12\pi}}(t_f - t) \quad (6.29)$$

Con la quale possiamo calcolare il valore del potenziale

$$\begin{aligned} V_{attr} &= \frac{1}{2}m^2\phi^2 = \frac{1}{2}m^4\frac{(t_f - t)^2}{12\pi} \\ V_{attr} &= \frac{1}{24\pi}m^4(t_f - t)^2 \end{aligned} \quad (6.30)$$

Il termine cinetico sarà invece (usando la (6.27))

$$\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 = \frac{m^2}{24\pi} \quad (6.31)$$

Possiamo quindi riarrangiare l'**equazione di stato** tenendo conto delle condizioni di lento rotolamento

$$p_\phi + \rho_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi) + \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \equiv \dot{\phi}^2$$

che per la (6.31) si scrive

$$p_\phi = -\rho_\phi + \frac{m^2}{12\pi} \quad (6.32)$$

Alternativamente possiamo scrivere

$$p_\phi - \rho_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi) - \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi) \equiv -2V$$

che per come abbiamo definito il potenziale nella (6.17) ci dà

$$p_\phi = \rho - m^2\phi^2 \quad (6.33)$$

L'inflazione finisce quando la pressione torna ad essere positiva, $p_\phi > 0$ e questo succede quando l'energia potenziale bilancia l'energia cinetica. Dalle (6.32) e eqrefeq:Linde-43 vediamo che ϕ_f , che prima avevamo preso rozzamente uguale a zero, sarà invece dato da

$$m^2\phi^2 \approx m^2$$

$$\phi_f \approx 1$$

(ricordando che siamo in unità Planckiane), l'inflazione termina quando il potenziale $V(\phi) \approx m^2$, ovvero quando ϕ è dell'ordine dell'unità.

Per avere informazioni sulla dinamica dell'espansione risolviamo la Seconda Equazione di Friedmann. La forma che usiamo è quella della (6.18), nella quale implementiamo le condizioni per questa fase, quindi

$$\begin{aligned} H^2 &= \frac{8\pi}{3}\rho = \frac{8\pi}{3}V = \frac{m^4}{9}(t_f - t)^2 \\ H &= \frac{d \ln a}{dt} = \frac{m}{3}(t_f - t) \Rightarrow \ln a = \frac{m^2}{3}(t_f - t)^2 \frac{1}{2} + \ln a_f \end{aligned}$$

dove a_f è una costante di normalizzazione. Otteniamo infine

$$a(t) = a_f \exp \left[-\frac{m}{6}(t_f - t)^2 \right] \quad (6.34)$$

che, poiché $t < t_f$, mi dice che l'espansione è esponenziale positiva, quindi accelerata!

Ci chiediamo ora però quanto duri questo periodo di inflazione. Questa domanda è di cruciale importanza poiché abbiamo bisogno che duri a sufficienza per risolvere i diversi problemi che abbiamo visto (in particolare quello dell'orizzonte cosmologico). Il limite inferiore di durata è fissato dal numero di e -folding

$$\mathcal{N} = \ln \frac{a_f}{a_i} \gg 60$$

Noi si era trovato $\ln \frac{a_f}{a_i} = -\frac{m^2}{6}(t_f - t)^2$ e, poiché $a(t) \equiv a(t_i) = a_i$, avremo

$$\ln \frac{a_f}{a_i} = -\ln a_i a_f = \frac{m^2}{6}(t_f - t_i)^2$$

ma poiché valgono (contemporaneamente) le (6.28) e (6.29)

$$\phi_{attr}(t) = \phi_i - \frac{m}{\sqrt{12\pi}}(t - t_i) = \frac{m}{\sqrt{12\pi}}(t_f - t)$$

$$\phi_i = \frac{m}{\sqrt{12\pi}}(t_f - t_i) \Rightarrow (t_f - t_i)^2 = \frac{12\pi}{m^2}\phi_i^2$$

sostituiamo quindi nell'espressione per il numero di e -folding

$$\mathcal{N} = \ln \frac{a_f}{a_i} = \frac{m^2}{6} \frac{12\pi}{m^2} \phi_i^2 \gg 60 \Rightarrow 2\pi\phi^2 \gg 60$$

Ovvero, in una situazione come quella del semplice esempio di potenziale che stiamo esaminando, perchè l'inflazione duri abbastanza bisognerà che l'inflatone intersechi l'attrattore a

$$\phi_i \gg 3$$

che non è una condizione molto stringente. Ma aspettiamo a cantar vittoria perché non dobbiamo dimenticare che stiamo lavorando in unità Planckiane, dunque il 3 in realtà va letto come “3 volte il valore dell'inflatone al tempo di Planck” (cioè all'epoca in cui gli effetti quantistici gravitazionali non possono essere trascurati). Noi in linea di principio, non vorremmo rischiare di trovarci in regime trans-planckiano (e qui ci saremmo perché $\phi \gg 3 > 1\phi_P$) perché lì siamo impotenti a livello di fisica. Non dimentichiamo però che abbiamo definito il potenziale $V \propto m^2\phi^2$, è tale prodotto che ci dice se siamo o no oltre i valori Planckiani, quindi possiamo vedere di che ordine è la massa e se basta quindi a riportarci a regimi sub-Planckiani. Al tempo di GUT ($10^{15} GeV$) la massa corrispondente è di $m_{GUT} = 10^{-4}m_P$ e quindi

$$V \propto (10^{-4})^2\phi^2 < 1 \iff \phi^2 < 10^8 \Rightarrow |\phi| < 10^4$$

Perciò fintanto che $\phi_i < 10^4$ non rischiamo di sbrodolare in regime trans-planckiano e questo per noi è più che sufficiente per realizzare $\phi_i \gg 3$. Tutto questo grazie al fatto che

abbiamo a che vedere con masse piccole rispetto alla massa di Planck. Possiamo stare sereni poiché non usciamo dal regime di validità della relatività generale.

D'accordo, bella la vita fin quì, ma come usciamo dall'inflazione?

6.2.3 Fase (c): Uscita Graziosa dall'Inflazione

Siccome ora l'Universo sembrerebbe essere in espansione accelerata qualche incauto potrebbe chiederci se non siamo ancora in fase di inflazione, ma siccome noi siamo dritti gli risponderemmo subito che, zio, stiamo a 3 kelvin, è un'energia un po' bassina rispetto a quelle tipiche del periodo inflazionario...poi fai tu!

Quindi pare di capire che la domanda con cui abbiamo chiuso la precedente sezione non sia proprio una domanda stupida. Dobbiamo quindi capire come fa l'Universo a tornare in condizioni di Friedmann, cioè come ritorna ad evolvere normalmente come ci aspettiamo dovrebbe fare dopo il Big-Bang. Essendo ancora vicini al Big-Bang vogliamo che all'uscita dall'inflazione l'Universo sia approssimabile a piatto ($K = 0$) e in fase radiativa (cioè abbia equazione di stato $p = \rho/3$). Rimettiamo quindi di nuovo mano alla Seconda Equazione di Friedmann in unità naturali

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi}{3}\rho a^2$$

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = H^2 = \frac{8\pi}{3}\rho = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)\right)$$

da cui

$$\dot{\phi}^2 + m^2\phi^2 = \frac{3}{4\pi}H^2 \quad (6.35)$$

che è una bella equazione quadratica, e nello spazio delle fasi come ben sappiamo tutti (vero?), una quadratica rappresentano l'**equazione di un oscillatore armonico**! La (6.35) rappresenterà le oscillazioni attorno alla posizione finale di equilibrio. Poiché oscillatore armonico possiamo scrivere

$$\dot{\phi} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}H \sin \theta \quad (6.36)$$

$$m\phi = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}H \cos \theta \quad (6.37)$$

Con queste farciamo l'equazione di Klein-Gordon

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi}m^2\phi = 0$$

che diventa quindi

$$\ddot{\phi} = -3\sqrt{\frac{3}{4\pi}}H^2 \sin \theta - m\sqrt{\frac{3}{4\pi}}H \cos \theta$$

$$\ddot{\phi} = -\sqrt{\frac{3}{4\pi}}(3H^2 \sin \theta + mH \cos \theta) \quad (6.38)$$

condiamo il tutto con un po' di algebra e lasciamo in forn...ehm no, algebra! Dalla (6.36) ricaviamo

$$\sqrt{\frac{3}{4\pi}} m \dot{\phi} = mH \sin \theta = \frac{d}{dt}(H \cos \theta) = \dot{H} \cos \theta - H \dot{\theta} \sin \theta$$

dall'uguaglianza tra secondo e quarto termine

$$\frac{\dot{H}}{H} \cos \theta = (m + \dot{\theta}) \sin \theta$$

$$(m + \dot{\theta}) = \frac{\dot{H} \cos \theta}{H \sin \theta} \quad (6.39)$$

analogamente agendo sulla (6.38)

$$\sqrt{\frac{4\pi}{3}} \ddot{\phi} = -3H^2 \sin \theta + mH \cos \theta = \frac{d}{dt}(H \sin \theta) = \dot{H} \sin \theta + H \dot{\theta} \cos \theta$$

$$\sin \theta (-3H^2 - \dot{H}) = \cos \theta (\dot{\theta} H + mH) = H \cos \theta (\dot{\theta} + m)$$

nella quale sostituisco la (6.39)

$$\sin \theta (-3H^2 - \dot{H}) = H \cos \theta \frac{\dot{H} \cos \theta}{H \sin \theta}$$

$$\sin^2 \theta (-3H^2 - \dot{H}) = \dot{H} (1 - \sin^2 \theta)$$

$$\dot{H} = -3H^2 \sin^2 \theta \quad (6.40)$$

Prendiamo ora la (6.40) e sostituiamola nella (6.39)

$$(m + \dot{\theta}) = -3H^2 \sin^2 \theta \frac{1}{H \sin \theta} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = -3H \sin \theta \cos \theta = -3H \frac{\sin(2\theta)}{2}$$

Nel tempo quindi θ evolve seguendo l'equazione oraria

$$\dot{\theta} = -m - \frac{3}{2} H \sin(2\theta) \quad (6.41)$$

che ci giustifica l'andamento a spirale che vediamo in Figura 6.3. Poichè, dalla (6.40), $\dot{H} < 0$ allora H sarà decrescente, quindi il secondo termine al secondo membro della (6.41) decade! Quel termine rappresenta l'ampiezza delle rotazioni che decresce regolarmente fino a scomparire del tutto: parliamo di uscita graziosa (**graceful exit**). Integriamo ora la (6.41) per ottenere

$$\theta = -mt + \cos t \quad (6.42)$$

Il termine oscillatorio (quello in $\sin \theta$) nel tempo si smorza e quindi lo possiamo trascurare, rimane solo la costante di integrazione ma poiché è un angolo (abbiamo una rotazione) neanche questa ci interessa (ci basta settare i tempi in modo di porla uguale a zero). La (6.42) ci dice che l'angolo θ decresce linearmente con il tempo (in sostanza **spiraleggiamo** come se non ci fosse un domani).

Sappiamo ora come varia θ e possiamo quindi sostituirlo nell'equazione (6.40)

$$\dot{H} = -3H^2 \sin^2(mt) \Rightarrow -\frac{\dot{H}}{H^2} = 3 \sin^2(mt)$$

che è abbastanza evidentemente una derivata:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{H} \right) = \frac{3}{2} (1 - \cos(2mt))$$

e quindi la integriamo (previa opportuna separazione delle variabili)

$$\frac{1}{H} = \frac{3}{2}t - \frac{3}{2} \frac{1}{2m} \sin(2mt) + \text{cost} = \frac{3}{2}t \left(1 - \frac{\sin(2mt)}{2mt} \right)$$

$$H = \frac{2}{3t} \left(1 - \frac{\sin(2mt)}{2mt} \right)^{-1}$$

e poiché siamo in un regime per cui $mt \gg 1$ possiamo sviluppare con Taylor

$$H \approx \frac{2}{3t} \left(1 + \frac{\sin(2mt)}{2mt} \right) \approx \frac{2}{3t} \quad (6.43)$$

$$H \approx \frac{2}{3t}$$

Poiché il termine dominante è quello al primo ordine. Quello che vogliamo è l'andamento di $a(t)$ a cui possiamo arrivare ricordando che $H = \frac{d \ln a}{dt}$, quindi al primo ordine (trascurando cioè la funzione $\text{sinc}(2mt)$)

$$\ln a \propto \frac{2}{3} \ln t$$

otteniamo quindi che il fattore di scala esce dall'inflazione con un andamento

$$a(t) \propto t^{2/3} \quad (6.44)$$

Notare che questo andamento non ci è molto gradito infatti negli Universi EdS⁸ si è detto che $a \propto t^{2/[3(1+w)]}$, quindi per ottenere questo andamento dovrebbe essere $w = 0$, ovvero ci ritroviamo in un Universo di materia⁹ mentre volevamo uscire in un Universo termalizzato, e quindi radiativo con $w = 1/3$. Per capire come si risolve questo problema parleremo del **re-heating**¹⁰.

Prima di questo però dobbiamo ancora capire come si comporta l'inflatone nell'uscita dall'inflazione. Abbiamo che

$$\phi = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{H}{m} \cos \theta \approx \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{H}{m} \cos mt$$

e dalla (6.43) possiamo riscrivere

⁸Quale noi quì siamo.

⁹Il Mukhanov a riguardo dice "Questo non è sorprendente poiché un campo oscillante omogeneo può essere pensato come un condensato di particelle massive con momento nullo. Le correzioni oscillatorie sono completamente trascurabili nelle espressioni per $a(t)$ e $H(t)$ [...]"

¹⁰Ancora dal Mukhanov: "Abbiamo mostrato [n.d.a. anche noi] che l'inflazione con una uscita graziosa avviene naturalmente in modelli con campi scalari massivi classici. Se la massa è piccola comparata con quella di Planck, la fase inflazionaria dura a sufficienza ed è seguita da una fase *cold-matter dominated*. Questa materia fredda, che consiste di particelle scalari pesanti, deve essere alla fine convertita in radiazione, barioni e leptoni. Vedremo più avanti [n.d.a. anche noi] che questo può essere facilmente raggiunto in una varietà di modi."

$$\phi = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{2 \cos(mt)}{3mt} \left(1 + \frac{\sin(2mt)}{2mt} \right)$$

che riscriviamo in forma più elegante con tanto di o-grandi e compagnia

$$\phi(t) = \sqrt{\frac{1}{3\pi}} \frac{\cos(mt)}{mt} \left(1 + \frac{\sin(2mt)}{2mt} \right) + O(t^{-3}) \quad (6.45)$$

da cui quindi l'inflatone varia (al primo ordine) come un coseno diviso per il suo argomento, che corrisponde alla fase di spiraleggiamento che si stringe nel tempo nello spazio delle fasi in Figura 6.3. Si usa riscrivere l'andamento dell'inflatone in questa fase esplicitando la dipendenza dal coseno:

$$\phi(t) = \Phi(t) \cos(mt) \quad (6.46)$$

dove $\Phi(t)$ è un termine di “ampiezza” delle oscillazioni che raccoglie tutto quello che non è coseno e contiene quindi a sua volta dei termini di oscillazione nella funzione sinc.

6.3 Modello Generalizzato

Abbiamo visto ora l'evoluzione completa dell'inflatone prima durante e dopo l'inflazione di tipo Linde per il semplice caso di un potenziale del tipo $V(\phi) = \frac{m^2 \phi^2}{2}$. I modelli di inflazione però possono essere tanti quante sono le forme che il potenziale può assumere. Diamo allora un'esposizione di come si presenta il problema in forma generale per un potenziale V qualsiasi. Abbiamo già visto che le equazioni risolventi sono l'equazione di Klein-Gordon

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0 \quad (6.47)$$

e la Seconda Equazione di Friedmann nella forma

$$H^2 = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V \right) \quad (6.48)$$

Si impongono le condizioni di lento rotolamento

$$|\ddot{\phi}| < |3H\dot{\phi}|$$

$$|\dot{\phi}^2| \ll V$$

Da cui quindi posso riscrivere la (6.47) e definire

$$V' := \frac{\partial V}{\partial \phi} = -3H\dot{\phi}$$

e la (6.48)

$$H^2 = \frac{8\pi}{3} V$$

Cambiamo cronometro ed usiamo ϕ al posto di t , scriveremo

$$\begin{aligned}
H &= \frac{d \ln a}{dt} = \frac{d \phi}{dt} \frac{d \ln a}{d \phi} = \dot{\phi} \frac{a'}{a} = -\frac{V'}{3H} \frac{a'}{a} \\
-V' \frac{a'}{a} &= 3H^2 = 8\pi V \\
\frac{a'}{a} &= -8\pi \frac{V}{V'}
\end{aligned}$$

da cui

$$a(\phi) = a_i \exp \left[- \int_{\phi_i}^{\phi_f} 8\pi \frac{V}{V'} d\phi \right] \quad (6.49)$$

dalla quale vediamo tra l'altro come il numero di e -folding sia strettamente legato a come varia V rispetto a ϕ .

Le due condizioni di lento rotolamento in termini di $\frac{V'}{V}$ possono essere riscritte

$$\left(\frac{V'}{V} \right)^2 \ll 1 \quad \left| \frac{V'}{V} \right| \ll 1$$

questo tipo di scrittura è più moderna. Fornendo delle forme molto generiche per il potenziale abbiamo

$$V = \frac{\lambda}{n} \phi^n$$

$$V' = \lambda \phi^{n-1} = \frac{nV}{\phi}$$

$$V'' = n(n-1)\phi^{n-2} = n(n-1) \frac{V}{\phi^2}$$

Riscriviamo ancora le condizioni di lento rotolamento che diventano rispettivamente

$$\left(\frac{n}{\phi} \right)^2 \ll 1 \quad \left| \frac{n(n-1)}{\phi^2} \right| \ll 1$$

Con queste l'integrale nella (6.49) diventa

$$\int_{\phi_i}^{\phi_f} \frac{V}{V'} d\phi = \int_{\phi_i}^{\phi_f} \left(\frac{n}{\phi} \right)^{-1} d\phi = \frac{1}{2n} (\phi_f^2 - \phi_i^2)$$

e dunque il fattore di espansione varierà con ϕ

$$a(\phi) = a_i \exp \left[\frac{4\pi}{n} (\phi_f^2 - \phi_i^2) \right] \quad (6.50)$$

Anche nel caso generale il modello prevede un andamento esponenziale dell'espansione durante l'inflazione.

In linguaggio moderno i modelli vengono sviluppati in termini di due parametri

$$\epsilon := \frac{1}{16\pi} \left(\frac{V'}{V} \right)^2 \quad (6.51)$$

$$\eta := \frac{1}{8\pi} \left(\frac{V''}{V} \right) \quad (6.52)$$

Questi due parametri sono osservabili¹¹ e quindi il compito del modellista è quello di trovare un tipo di potenziale V che soddisfi ϵ e η .

Il potenziale è strettamente collegato al meccanismo con cui si generano le fluttuazioni di densità, progenitrici delle strutture su grande scala che osserviamo oggi.

6.4 Re-Heating

Il modello del re-heating è ancora lontano dal completamento, è complesso e si addentra nei meandri della fisica delle particelle. Noi non ci vogliamo così male e siamo interessati solo a capire quali siano i processi fondamentali e le temperature in gioco.

All'uscita dall'inflazione deve avvenire la **bariogenesi**, ovvero si devono formare particelle grazie al decadimento del nostro caro inflatone. Consideriamo quindi un inflatone ϕ di massa m , potrà decadere in due modi:

- in una coppia di **scalari** χ ;
- in una coppia di **spinori** $\psi, \bar{\psi}$.

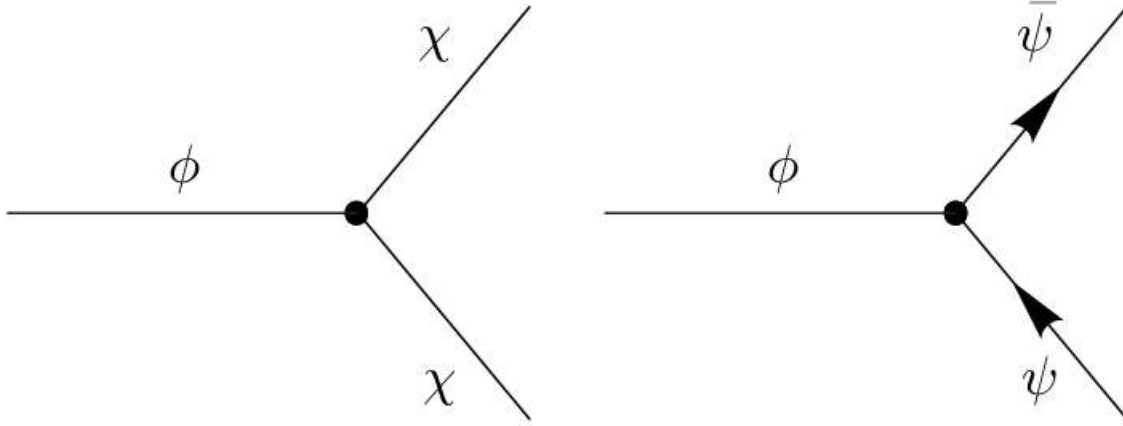


Figura 6.4: *Diagrammi di decadimento a tre rami dell'inflatone. A sinistra il decadimento in una coppia di scalari, a destra nella coppia spinore-antispinore.*

Le interazioni (decadimenti) più semplici degli inflatoni avvengono come descritto dai diagrammi in Figura 6.4, che corrispondono ai termini della lagrangiana

$$\Delta\mathcal{L}_{int} = -g\phi\chi^2 - h\phi\bar{\psi}\psi$$

¹¹Solo di recente, grazie alla sonda Planck, è diventato effettivamente possibile osservarli.

Con la fisica delle particelle possiamo calcolare le costanti di accoppiamento¹² g e h che determinano i rate di decadimento dell'inflatone nella coppia $\chi\chi$ o $\psi\bar{\psi}$, rispettivamente. Tali rate sono dati da

$$\Gamma_\chi = \frac{g^2}{8\pi m}$$

per la coppia $\chi\chi$, e da

$$\Gamma_\psi = \frac{h^2 m}{8\pi}$$

per la coppia $\psi\bar{\psi}$. Si potrebbe dimostrare con argomenti di fisica quantistica che è necessario restringere l'interazione. In particolare, le (eventuali) correzioni quantistiche sono ininfluenti solo se $g < m$ ed $h < m^{1/2}$. Perciò, per $m \ll m_P$ (in unità Planckiane $m \ll 1$, e abbiamo visto che è così che vanno le cose), il più alto rate di decadimento in particelle χ dell'inflatone, $\Gamma_\chi \sim m$, è molto più grande del più alto rate di decadimento in fermioni possibile, $\Gamma_\psi \sim m^2$. Questo significa però che

$$\Gamma_\chi \gg \Gamma_\psi$$

è dunque favorito il canale di decadimento che produce le particelle χ , trascureremo quindi il canale che produce fermioni¹³.

Il tempo medio di vita di un inflatone è dato dall'inverso del rate di decadimento, quindi sarà

$$\tau_\phi \approx \Gamma^{-1} \propto m^{-1}$$

QUINDI????????PG.110 APPUNTI HELP! (il periodo delle oscillazioni è in $\cos(mt)$ vedi (6.46))

Le particelle che si formano dal decadimento degli inflatoni hanno tutto il tempo di termalizzare, ed essendo il canale scalare che produce bosoni quello favorito possiamo tranquillamente porre $w = 1/3$.

Ci chiediamo ora a che temperatura viene a trovarsi l'Universo quando esce dal periodo di inflazione e dopo quanto tempo può essere considerato un mezzo termalizzato. Affinché il mezzo possa termalizzare è necessario che il tempo tipico delle collisioni tra le particelle sia inferiore del tempo tipico di attraversamento del volume da termalizzare. Come tempo tipico delle collisioni prendiamo il tempo tipico di decadimento e come tempo di attraversamento il solito tempo tipico di espansione, dovrà quindi valere

$$\Gamma_\chi^{-1} \leq H^{-1}$$

¹²Abbiamo già accennato alle costanti di accoppiamento in una nota tratta da wikipedia nella Sezione 5.1. Il concetto più generale comunque è che una costante di accoppiamento è un numero che determina l'intensità della forza esercitata in un'interazione. Di solito l'Hamiltoniana o la Lagrangiana di un sistema possono essere separate in una parte cinetica e in una di interazione. La costante di accoppiamento determina l'importanza della parte di interazione rispetto a quella cinetica o rispetto a due fasi dell'interazione stessa. Ad esempio, la carica elettrica di una particella è una costante di accoppiamento

Le costanti di accoppiamento giocano un importante ruolo in dinamica. Ad esempio possono essere usate per stilare gerarchie di approssimazioni basate sull'importanza di diverse costanti di accoppiamento. Ad esempio nel moto di grandi gruppi di ferro magnetizzato, le forze magnetiche sono più importanti di quelle gravitazionali per la entità delle rispettive costanti di accoppiamento. In meccanica classica tale stima viene fatta confrontando direttamente le forze in gioco.

¹³Se non ho capito male comunque, gli scalari sono bosoni e gli spinori fermioni. (e la vita va avanti)

Consideriamo il caso in cui i due tempi siano confrontabili in modo da trovare un limite superiore, varrà allora

$$\Gamma \approx H = \sqrt{\frac{8\pi}{3}} \rho$$

dove il valore di H ce l'ho per come ho preso la Seconda Equazione di Friedmann.

????????????????????????????????????PASSAGGI A PG 111 APPUNTI PER ARRIVARE A T_{RH}

Trovo quindi la massima temperatura di re-heating, a cui può venire a trovarsi l'Universo al termine dell'inflazione,

$$T_{RH} \approx 0.2 \left(\frac{100}{g^*} \right)^{-1/4} \Gamma^{-1/2} \quad (6.53)$$

il valore 100 è un valore tipico di g^* in quest'epoca, quindi il termine tra parentesi vale circa 1. Dobbiamo fare comunque attenzione al fatto che il tasso di decadimento $\Gamma \propto m$, quindi anche la T_{RH} dipenderà dalla massa dell'inflatone. Tale massa potrebbe assumere molti valori ma dobbiamo imporre una importante restrizione. Noi non vogliamo assolutamente che la temperatura dell'Universo dopo l'inflazione torni sopra alla temperatura della transizione GUT. Dovremo quindi imporre

$$T_{GUT} > T_{RH} \quad (6.54)$$

La massa dell'inflatone quindi non potrà superare l'equivalente in massa di $10^{15} GeV$, ovvero dovrà valere $m_\phi < 10^{13} GeV$.

La condizione (6.54) è un vincolo teorico che deve essere rispettato dai modelli¹⁴, insieme ai vincoli osservativi su V , V' e V'' imposti da η ed ϵ (vedi Sezione 6.3).

6.5 Riassunto sul Paradigma dell'Inflazione

Il modello del Big-Bang, come abbiamo visto nel Capitolo 5, presenta diversi problemi, alcuni dei quali possono essere risolti introducendo un periodo di espansione accelerata nella storia evolutiva dell'Universo. La possibilità di risolvere tali problemi è legata anche alla durata del periodo inflativo che deve essere tale da dare un numero di e -folding $\mathcal{N}$ sufficientemente grande.

L'introduzione del periodo inflazionario abbiamo visto, ancora nel Capitolo 5, risolve quindi tre problemi fondamentali del modello del Big-Bang (orizzonte, monopoli, piattezza/età), è necessario quindi trovare un modello di inflazione funzionante e sensato. Abbiamo visto due casi "storici" più una versione generalizzata del secondo modello.

- **modello di Guth.** Questo modello suggerisce che l'inflazione sia avvenuta durante la transizione di fase GUT, ne esistono due "versioni":
 - **Old Inflation**, suggerisce che la transizione GUT sia una transizione di fase di primo tipo e che la differenza di energia libera che viene rilasciata al termine porti al fenomeno del re-heating con la formazione delle particelle. Sebbene questo modello abbia successo nel spiegare la bariogenesi, prevede delle regioni termalizzate (e quindi in connessione causale) troppo piccole rispetto alle osservazioni.

¹⁴Quindi badate bene modellisti!

- **New Inflation**, in questo caso si afferma che la transizione di fase GUT sia di secondo tipo. Se da una parte questa assunzione consente di avere regioni in connessione causale sufficientemente estese al termine dell'inflazione, dall'altra non prevede un rilascio di energia sufficiente al termine da spiegare la formazione delle particelle, a meno che non si accetti del fine-tuneing nella scelta del potenziale.
- **Inflazione Caotica**. Rinuncia alle transizioni di fase come fenomeno scatenante l'inflazione e funziona solo se si suppone l'esistenza di un campo scalare, detto inflatone¹⁵, con un'energetica tale da soddisfare alcune condizioni:
 - $|\dot{\phi}|$ sia molto grande nelle fasi iniziali del processo, prima che avvenga l'inflazione vera e propria;
 - l'intersezione dell'inflatone con l'attrattore, nello spazio delle fasi, avvenga a tempi sufficientemente grandi.

Raggiunto l'attrattore l'evoluzione dell'inflatone ne segue la traiettoria, in questa fase abbiamo l'espansione accelerata (i.e. l'inflazione). Terminata la fase inflativa sono le oscillazioni attorno alla nuova posizione di equilibrio a “creare le particelle”.

Ad oggi il modello più funzionante è ancora quello dell'Inflazione caotica ed è stato rafforzato anche da recenti conferme osservative. Il termine “caotico” deriva dalla capacità del modello di far arrivare sull'attrattore l'inflatone, dato un vasto range di possibili condizioni iniziali, senza doversi appoggiare ad alcuna transizione di fase. Sono attualmente in opera tentativi di legare come è fatto l'inflatone a test osservativi, è quindi un **modello falsificabile** attraverso dei test fondamentali, primo tra tutti $\Omega_{tot} = 1$. Tutti i dati osservativi più recenti vanno in questa direzione. I dati della missione Planck danno

$$\Omega_{tot} = 1.02 \pm 0.02$$

Altra validissima prova (la principale) osservativa è data dalla radiazione cosmica di fondo. La CMB permette una misura della geometria dell'Universo infatti costituisce un righello standard (l'orizzonte dell'Universo all'epoca del disaccoppiamento). L'angolo sotto cui vediamo la CMB dipende quindi dalla geometria dell'Universo.

Ritorniamo sul concetto di inflazione quando parleremo delle fluttuazioni di densità da essa generate. Tali fluttuazioni si ritiene siano i seed delle strutture di grande scala che si formano con l'evoluzione dell'Universo (e.g. galassie ed ammassi di galassie).

Il modello dell'inflazione non risolve i problemi di origine, costante cosmologica ed esistenza della dark-matter.

Ribadiamo ancora una volta che, sebbene nel periodo inflazionario l'Universo subisca un'espansione accelerata con $w < -1/3$, l'azione della costante cosmologica ($w_\Lambda = -1$) oggi provoca sì un'espansione accelerata, ma questa non è neanche lontanamente sufficiente a risolvere i tre problemi che invece l'inflazione sbrogia. L'energetica dell'Universo accelerato oggi è ridicolmente inferiore a quella nel periodo inflazionario.

È importante sottolineare infine che il modello dell'inflazione ad oggi ha superato tutti i test osservativi.

¹⁵Si tratterebbe di un particolare tipo di bosone di Higgs.

Capitolo 7

Evoluzione dell'Universo Post-Inflazione

Ora che abbiamo visto i modelli inflazionari in grado di risolvere alcuni dei profondi problemi che scaturiscono dal modello del Big-Bang procediamo nella storia evolutiva del nostro Universo. Abbiamo visto che, al termine dell'inflazione, siamo ancora in fase radiativa. Vogliamo arrivare all'epoca in cui domina la materia, cioè dopo l'equivalenza, così da verificare che il nostro modello spieghi la **nucleosintesi primordiale**, ovvero la formazione degli elementi leggeri che vanno a comporre i primi mattoni del nostro Universo, e la **formazione dell'idrogeno** fase che coincide con l'assottigliamento ottico dell'Universo, in cui il libero cammino medio dei fotoni diventa infinito(?).

Prima di questo vediamo però le due ere immediatamente successive all'inflazione, l'era adronica e l'era leptonica, in entrambe è ancora la radiazione a dominare.

7.1 Era Adronica (cenni)

A temperature molto elevate, la materia nell'Universo esiste sotto forma di un plasma di quark e gluoni. L'epoca adronica comincia con la **transizione quark-adroni** che inizia a $T_{QH} \approx 200 \div 300 MeV$ e si conclude quando $T \approx 130 MeV$, epoca in cui annichilano i pioni. In quest'epoca i quark passano da liberi a confinati in particelle composite chiamate adroni. Tali particelle hanno vita media solitamente breve (fatta eccezione per protoni e neutroni), quindi questo è l'unico periodo in cui il loro contributo è importante. Il nome "era adronica" non deve però cogliere in inganno poiché in quest'era è ancora la radiazione a dominare la densità di energia dell'Universo¹. Quando la temperatura dell'Universo è ancora $T > T_{QH}$, l'Universo è composto da fotoni, gluoni, coppie leptone-antileptone e coppie quark-antiquark. Raggiunta T_{QH} l'Universo subisce una transizione di fase, probabilmente di primo tipo, attraverso la quale le coppie quark-antiquark si uniscono a formare gli adroni, pioni e nucleoni inclusi. In questo periodo le interazioni pione-pione sono molto importanti e, di conseguenza, l'equazione di stato del fluido adronico diventa molto complessa, non potremo quindi applicare l'approssimazione di gas perfetto agli adroni in questa era. Questa termina quando si scende a $T_\pi \approx 130 MeV$, temperatura alla quale i pioni annichilano.

È interessante studiare cosa succede alla distribuzione di neutroni e protoni in questa era, poichè sono queste particelle gli ingredienti di base per la formazione degli elementi chimici principali (idrogeno ed elio).

¹È però solo in quest'era che si possono formare gli adroni.

Queste particelle seguono la **distribuzione di Boltzmann**, la densità numerica della particella i (con $i = n$ o $i = p$) sarà data quindi dalla

$$n_i = \frac{2}{h^3} \left(\frac{m_i K_B T}{2\pi} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{m_i c^2}{K_B T} \right] \quad (7.1)$$

Nel numeratore dell'esponenziale viene trascurato il termine di **potenziale chimico**: $\mu = 0$. Tale termine definisce il modo in cui l'energia interna di un sistema cambia quando cambia il numero di particelle che lo compongono, o anche, misurera il livello di degenerazione dei diversi stati quantici². Si potrebbe dimostrare che in quest'era il potenziale chimico può essere trascurato e che ciò succede grazie alle proprietà di conservazione di numero adronico, numero leptonic e carica elettrica. Quando siamo in una situazione in cui le particelle sono (quasi completamente) bilanciate dalla antiparticelle tali leggi di conservazione ci assicurano che il potenziale chimico può essere preso $\mu = 0$.

Vogliamo ora vedere in che rapporto sono neutroni e protoni, con le (??) scriviamo quindi

$$\frac{n_n}{n_p} = \left(\frac{m_n}{m_p} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{(m_n - m_p)c^2}{K_B T} \right] \quad (7.2)$$

dove il rapporto tra le massime può essere preso $m_n/m_p \approx 1$ e in cui definiamo $Q := (m_n - m_p)c^2 \approx 1.3 \text{ MeV}$ quindi, poiché la (7.2) diventa

$$\frac{n_n}{n_p} \approx \exp \left[-\frac{1.3 \text{ MeV}}{K_B T} \right]$$

e poiché Q corrispondente ad una temperatura

$$T_{n,p} = \frac{Q}{K_B} \approx 1.5 \cdot 10^{10} \text{ K}$$

,

possiamo affermare che

$$\frac{n_n}{n_p} \approx \exp \left[-\frac{1.5 \cdot 10^{10}}{T} \right] \approx \exp(-\infty) \approx 1$$

Nell'era adronica $T \gg T_{n,p}$, quindi l'esponenziale tende ad uno, cioè abbiamo (quasi) esattamente lo stesso numero di neutroni e protoni. Bisognerà aspettare che diventi $T \approx T_{n,p}$ perchè il loro rapporto cambi in maniera sensibile.

Conoscere il rapporto tra neutroni e protoni è molto importante per la nucleosintesi primordiale.

7.2 Era Leptonica

Anche in questo caso vale il discorso fatto per la precedente, il nome non deve trarre in inganno, a dominare è ancora la radiazione.

L'era leptonica ha inizio quando avviene l'annichilazione dei pioni ($T_\pi \approx 130 \text{ MeV} \equiv 10^{12} \text{ K}$ che corrisponde a $t \approx 10^{-5} \text{ s}$ nella storia dell'Universo) e finisce quando l'Universo raggiunge la temperatura di annichilazione elettrone-positrone ($T_e = 0.5 \text{ MeV} \equiv 5 \cdot 10^9 \text{ K}$ corrispondente a $t \approx 10 \text{ s}$).

²Entrambe le "definizioni" sono da considerare *un tanto al chilo*.

In quest'epoca le temperature sono ancora sufficientemente alte da permettere l'esistenza dei leptoni e^+ , e^- , μ^+ , μ^- , mentre la coppia τ^+ , τ^- , essendo i tauoini più massicci, ha già annichilito a temperature superiori. Le altre componenti dell'Universo all'inizio dell'era leptonica sono: un piccolo numero di barioni, fotoni e i neutrini ν_e , ν_μ , ν_τ (nonostante il tauone abbia già annichilito, il neutrino corrispondente sopravvive). I barioni in questa fase sono non relativistici e pochi in numero, ne possiamo quindi trascurare il contributo. Il numero di gradi di libertà all'inizio dell'era leptonica è dato dalla

$$g^*(T < T_\pi) = \left[\sum_{bos} g_{B_i}^* + \frac{7}{8} \sum_{ferm} g_{F_i}^* \right] = 2 + 2 \times N_l \times \frac{7}{8} + 2 \times N_\nu \times \frac{7}{8} = 2 + 2 \times 4 \times \frac{7}{8} + 2 \times 3 \times \frac{7}{8} = 14.25 \quad (7.3)$$

dove il numero totale di gradi di libertà è dato dalla somma dei gradi di libertà di ogni tipo di particella in gioco, bosoni o fermioni, N_l è il numero di leptoni che abbiamo detto essere 4 trascurando il tauone, N_ν è il numero di neutrini, abbiamo detto 3, c'è un solo tipo di bosoni in gioco, i fotoni. Il peso statistico di neutrini e leptoni è $7/8$, quello dei bosoni è 1. (però non ho capito perché è tutto moltiplicato per due...) Il numero $g^* = 14.25$ corrisponde al tempo cosmologico $t \approx 10^{-5}s$. Anche nell'era leptonica, con gli stessi argomenti esposti nella sezione precedente, consideriamo tutti i potenziali chimici rilevanti uguali a zero.

All'inizio dell'era leptonica tutte le particelle costituenti menzionate sono all'equilibrio termodinamico. Per ottenere questo risultato basta confrontare i due tempi caratteristici τ_{coll} e τ_H . Poiché siamo ancora in condizioni EdS $\tau_H = 2t \approx 10^{-5} \div 10s$, mentre, per gli elettroni ad esempio, $\tau_{coll} = (\sigma_T n_e c)^{-1} \approx 10^{-21}s$: $\tau_{coll} \ll \tau_H \Rightarrow$ equilibrio! Lo stesso discorso è valido anche per i neutrini fintanto che $T > 10^{10}K$, temperatura alla quale si disaccoppiano dal resto dell'Universo.

Durante l'era leptonica si annichilano prima i muoni (quando $T < 10^{12}K$) poi elettroni e positroni (alla fine), inoltre quando la temperatura raggiunge $T \approx 10^9K$ avviene la nucleosintesi cosmologica (o nucleosintesi primordiale). Le condizioni perché tale nucleosintesi avvenga sono preparate durante l'era leptonica, motivo per il quale studieremo questa accuratamente.

Assumiamo che, durante l'evoluzione dell'Universo, ogni processo che avvenga tra componenti all'equilibrio termico sia un processo adiabatico, come tale avverrà a entropia costante³:

$$S = \frac{Q}{T} = \frac{(\rho c^2 + p)V}{T}$$

Come abbiamo detto l'Universo è ancora dominato dalla radiazione o, volendo essere corretti, dalla componente relativistica che avrà equazione di stato $p = \frac{1}{3}\rho c^2$, quindi

$$S = \frac{4}{3} \frac{\rho c^2 V}{T}$$

ricordando ora che, per le componenti accoppiate, la densità totale di energia è data dalla (5.4) vista nella Sezione 5.1⁴ potremo allora scrivere

$$S = \frac{2}{3} V \sigma T^3 g^* \quad (7.4)$$

³Questa ipotesi è ragionevole perché abbiamo a che fare con processi che avvengono con un rate lento: abbiamo a che vedere con fenomeni che sono essenzialmente processi adiabatici reversibili.

⁴ $\rho c^2 = \frac{g^* \sigma T^4}{2}$

Supponiamo ora di avere un sistema composto da due particelle che annichilano ad una temperatura T , ad esempio una coppia elettrone-positrone che annichila alla temperatura T_e

$$e^+ + e^- \leftrightarrow 2\gamma$$

Indichiamo con i simboli $(-)$ e $(+)$ le quantità prima e dopo l'annichilazione, rispettivamente. Per la conservazione dell'entropia avremo allora

$$S_{(-)} = \frac{2}{3}V\sigma T_{(-)}^3 g_{(-)}^* = S_{(+)} = \frac{2}{3}V\sigma T_{(+)}^3 g_{(+)}^*$$

dove abbiamo supposto che il tempo trascorso sia breve da cui il volume può essere preso costante, è come dire che siamo in coordinate comoventi. Vogliamo ora sapere come è variata la temperatura dopo l'annichilazione:

$$T_{(+)} = T_{(-)} \left(\frac{g_{(-)}^*}{g_{(+)}^*} \right)^{1/3}$$

ma l'annichilazione fa variare il peso statistico poichè variano i termini all'interno della (7.3), in particolare, diminuendo i termini che compaiono nella somma, avremo $g_{(+)} < g_{(-)}$. Quindi la temperatura fa un "salto" verso l'alto ogni volta che c'è un'annichilazione (Figura 7.1).

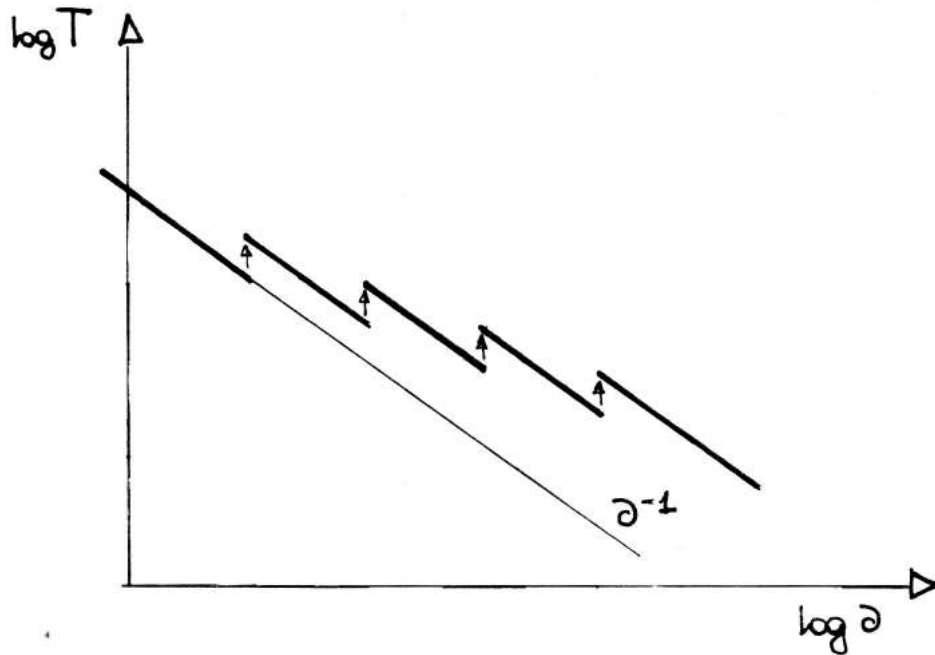


Figura 7.1: Grafico T - a logaritmico della variazione della temperatura in funzione del parametro di espansione (che qui usiamo come cronometro). Ad ogni annichilazione la temperatura fa un salto, seguendo la legge generale che è lineare nei logaritmi (quindi a legge di potenza).

Dunque non è vero che la temperatura segue pedissequamente la relazione $T \propto a^{-1}$, ma subisce una rinormalizzazione ad ogni annichilazione, l'andamento esatto è dato dalla

$$T = T_P \frac{a(t_P)}{a(t)} \left(\frac{g^*(T_P)}{g^*(T)} \right)^{1/3}$$

dove il pedice P si riferisce, come sempre, al tempo di Planck. Dal tempo di Planck ad oggi la temperatura passa da $T_P \approx 10^{32}K$ a $T_0 \approx 3K$ variando quindi di 32 ordini di grandezza mentre, il numero totale di gradi di libertà, passa da $g^*(t_P) = 200$ a $g^* = 2$, poichè la materia è ora disaccoppiata dalla radiazione, variando di soli 2 ordini di grandezza. Considerando inoltre che il rapporto tra i g^* compare sotto radice cubica, la correzione sulla legge della temperatura è inferiore ad un ordine di grandezza ($[\frac{200}{2}]^{1/3} = 4.64$) e dunque trascurabile rispetto all'andamento generale.

7.2.1 Il Background Cosmico di Neutrini

Abbiamo visto che ad ogni annichilazione la temperatura del fluido cosmologico subisce un guadagno in energia, grazie alla variazione del peso statistico complessivo. Questo avviene però solamente per le particelle che sono accoppiate alla radiazione. Poichè però i neutrini si disaccoppiano prima dei barioni, svilupperanno una differenza in temperatura con la radiazione. Vediamo nel dettaglio questo processo. I neutrini interagiscono con la materia per mezzo di interazioni elettrodeboli del tipo

$$\nu_e + \mu^- \leftrightarrow \bar{\nu}_\mu + e^-$$

$$\bar{\nu}_\mu + \mu^+ \leftrightarrow \nu_e + e^+$$

reazioni di questo tipo se avvengono con un rate sufficiente possono mantenere l'equilibrio termico. Alla temperatura di $10^{12}K$ avviene l'annichilazione dei muoni con il relativo salto in temperatura ma poichè qui i neutrini sono ancora accoppiati al fluido cosmologico radiativo, seguono l'andamento generale. Il disaccoppiamento dei neutrini avviene quando le reazioni elettrodeboli di cui sopra cominciano a non essere più efficienti. Tale momento può essere determinato confrontando il tempo scala delle interazioni ew e il tempo scala di espansione dell'Universo⁵. Allora il tempo tipico di espansione dell'Universo è dato dalla

$$\tau_H = \frac{1}{H} \approx 2t \approx 2 \left(\frac{3}{32\pi G\rho} \right)^{1/2}$$

dove si è sostituito il tempo con una funzione della densità $t \propto \rho^{-1/2}$, secondo il comportamento riassunto nella Tabella 2.1. Il tempo tipico collisionale per le reazioni ew dei neutrini è invece dato dalla

$$\tau_{coll} \propto \frac{1}{n_l \sigma_{ew} c}$$

dipendente dalla velocità a cui avvengono le interazioni (il fluido è relativistico quindi la velocità è quella della luce), dalla densità dei leptoni, $n_l \propto (K_B T / \hbar c)^3$, e dalla sezione d'urto dell'interazione ew, $\sigma_{ew} = (K_B T / \hbar c)^3 g_{ew}^2$ (dove g_{ew} è il fattore di accoppiamento elettrodebole, dell'ordine di $10^{49} g/cm^3$). Dal rapporto di questi due tempi

⁵In quest'epoca possiamo ancora assumere un Universo EdS di pura radiazione, in cui quindi $w = 1/3$, $\tau_H = \frac{1}{H} \approx 2t$.

$$\frac{\tau_H}{\tau_{coll}} \propto \left(\frac{T}{3 \cdot 10^{10} K} \right)^3$$

abbiamo che l'accoppiamento dei neutrini al fluido cosmologico vale fino a che la temperatura non scende al di sotto di $3 \cdot 10^{10} K$. A questa temperatura i neutrini sono ancora particelle relativistiche (e lo rimarranno per tutta la storia evolutiva dell'Universo, fino ad oggi) quindi evolvono parallelamente al fluido cosmologico anche loro con $T \propto a^{-1}$. Tutte le componenti mantengono quindi ancora la stessa temperatura nonostante il disaccoppiamento dei neutrini, si dice che *evolvono parallelamente su due diverse adiabatiche*.

La temperatura continua a scendere e raggiunge quella di annichilazione elettrone-positrone $T_e \approx 5 \cdot 10^9 K$. A questa temperatura il fluido cosmologico passa, dall'avere

$$g_{(-)}^* = 2 + 2 \times 2 \times \frac{7}{8} = \frac{11}{8}$$

gradi di libertà, all'averne

$$g_{(+)}^* = 2$$

,

questo comporta un nuovo “salto in alto” della temperatura:

$$T_{(+)} = T_{(-)} \left(\frac{11}{4} \right)^{1/3}$$

.

Da questo momento in poi niente è più accoppiato alla radiazione che continuerà la sua evoluzione indisturbata lungo l'adiabatica $T \propto a^{-1}$, parallela a quella dei neutrini che anche sono relativistici e tali rimangono, ma separata dalla stessa differenza acquisita in questo passaggio che si sarà mantenuta invariata fino ad oggi (Figura 7.2).

Troviamo infatti che la temperatura dei neutrini oggi è data dalla

$$T_{\nu,0} = T_{R,0} \left(\frac{4}{11} \right)^{1.3} \approx 2.7 \cdot 0.7 \approx 1.9 K$$

.

Trovato questo valore e considerato che si sono mantenuti relativistici fino ad oggi, possiamo trovare tutte le proprietà odierne dei neutrini (poichè infatti dipendono tutte dalla loro temperatura):

$$n_{\nu,0} = N_\nu 2g_\nu \left(\frac{K_B T_{\nu,0}}{\hbar c} \right)^3 = 108 N_\nu [cm^{-3}] \approx 324 cm^{-3}$$

dove $N_\nu = 3$ (a.k.a. esistono 3 tipi di neutrini). La densità numerica di fotoni odierna è $n_{0,\gamma} \approx 420 cm^{-3}$, quindi ci sono 70 neutrini ogni 100 fotoni, l'abbondanza relativa è di 0.7. Possiamo calcolarci la densità che, poichè nel modello standard i neutrini non avrebbero massa, va inteso come densità di energia (basta moltiplicare per la velocità della luce al quadrato⁶)

$$\rho_{\nu,0} = N_\nu 2g_\nu \frac{7}{8} \frac{\sigma T_{\nu,0}^4}{c^2} \approx 10^{-34} g/cm^3$$

⁶never forget: $\rho c^2 = \sigma T^4 \frac{g^*}{2}$

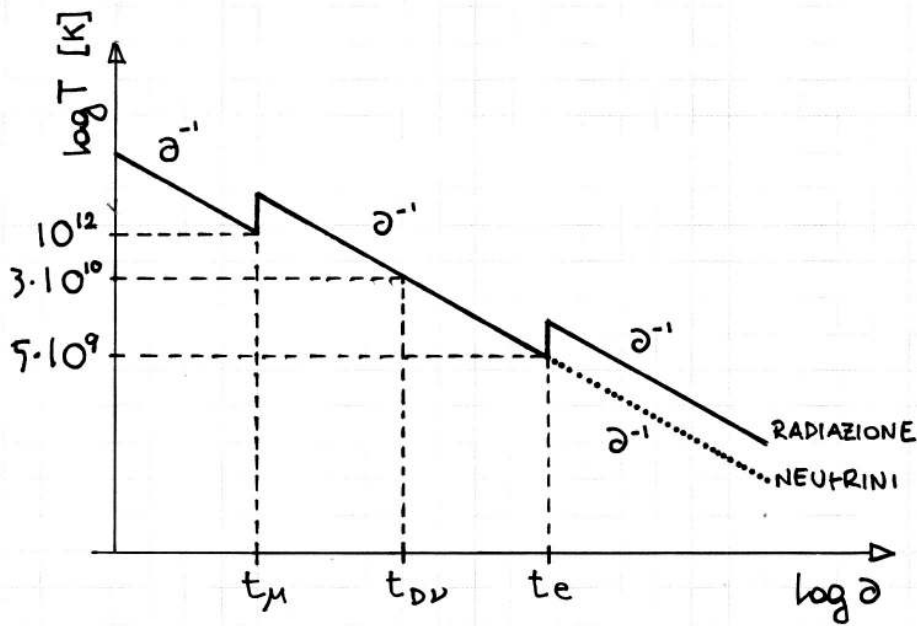


Figura 7.2: Grafico $\log T$ - $\log a$ della variazione della temperatura in funzione del parametro di espansione (che qui usiamo come cronometro). Sono evidenziati i tempi caratteristici di cui abbiamo parlato e i “salti” di temperatura corrispondenti. Notare le due adiabatiche parallele seguite da radiazione e neutrini a $t > t_e$.

e il rapporto con la radiazione è sempre di 0.7. Quindi il contributo dei neutrini al parametro di densità totale, essendo inferiore a quello della radiazione

$$\Omega_{0,\nu} \approx 0.7 \Omega_{0,R} \sim 10^{-5}$$

è ampiamente trascurabile sul totale.

Consideriamo invece il caso in cui i neutrini abbiano massa, al contrario di quanto previsto dal modello standard. In tal caso i neutrini sarebbero materia oscura calda: “materia” perché avrebbero massa⁷, “oscura” perché debolmente interagenti e “calda” perché relativistici all’epoca dell’equivalenza. Abbiamo già detto che

$$\Omega_{0,M} = \Omega_{0,B} + \Omega_{0,DM} \approx 0.3$$

potrebbe il contributo della materia oscura essere completamente dovuto ai neutrini? In tal caso che massa avrebbero?? Affinché il contributo di materia oscura possa essere dovuto esclusivamente ai neutrini la loro massa media dovrebbe essere di

$$\langle m_\nu \rangle = \frac{\sum_i m_{\nu_i}}{N_\nu} \approx 10 \text{ eV}$$

è un **limite superiore**. Da cui la densità di neutrini

$$\rho_{0,\nu} = \langle m_\nu \rangle n_{0,\nu} \approx 1.9 N_\nu \frac{\langle m_\nu \rangle}{10 \text{ eV}} \cdot 10^{-30} \text{ g/cm}^3$$

⁷eggraziearca...

sufficiente a fornire $\Omega_0, \nu \approx 0.3$. Ma quindi se la materia oscura fosse composta esclusivamente da neutrini questi dovrebbero avere una massa di 10 eV , mentre oggi sappiamo che questa si aggira invece intorno ai 0.3 eV . Quindi il contributo dei neutrini, anche se presente, non è dominante nel bilancio totale della materia oscura. Attualmente si pensa che la materia oscura dominante sia fredda, ovvero non relativistica al tempo dell'equivalenza.

L'ultimo commento che facciamo sui neutrini è che le stime sul loro contributo al totale vengono fatte anche considerando che, per loro natura, queste particelle tendono ad eliminare le perturbazioni alla densità media dell'Universo. Il fatto però che tali perturbazioni noi le osserviamo è un argomento a sfavore del loro contributo: il contributo dei neutrini deve essere mediocre. Affronteremo più avanti questo problema in maniere più dettagliata.

7.3 Nucleosintesi Primordiale

Parliamo ora del processo che porta alla formazione degli elementi leggeri. Il modello della nucleosintesi primordiale risale agli anni '40, ed è figlio degli studi sulla bomba atomica. Venne sviluppato da Ralph Alpher e George Gamow e funziona al punto da aver previsto, ben prima della consolidazione della teoria del Big-Bang, nonché molto prima delle osservazioni di Penzias e Wilson, l'esistenza di una radiazione cosmica di fondo (anche se la temperatura prevista era di $5K$, maggiore di un fattore circa 2 rispetto alle misure più recenti). Quando tale radiazione venne rintracciata, negli anni '70, questo pose fine alla diatriba tra chi sosteneva i modelli dello Stato Stazionario e chi quelli del Big-Bang.

Questo modello è uno dei più grandi successi del modello del Big-Bang e spiega come si sono formati idrogeno ed elio. Sappiamo che le abbondanze relative degli elementi nell'Universo sono di $X = 0.75$, $Y = 0.25$ e $Z \approx 0$. Con X si intende l'abbondanza di idrogeno, con Y quella di He^4 e con Z quella di metalli. In realtà l'abbondanza di metalli sarebbe maggiore ma ai fini della nostra trattazione questa è una approssimazione accettabile. Sono inoltre presenti He^3 , la cui abbondanza è di circa $10^{-3}Y$, e deuterio (d da qui in avanti), con abbondanza $2 \cdot 10^{-2}Y$.

Sappiamo inoltre che nei nuclei delle stelle avviene la fusione nucleare di elementi leggeri in elementi pesanti. Il problema è che se la produzione di He dovesse essere relegata alle sole stelle l'abbondanza non arriverebbe ad un settimo di quella osservata.

Chiediamoci allora come si formano H ed He e come si arriva alle abbondanze osservate. Nell'Universo primordiale sono presenti le condizioni in temperatura per formare elementi più pesanti di He^4 ma non quelle in densità. Si forma poca roba più pesante di He^4 e quindi non ci occuperemo della componente di metalli.

Il modello della nucleosintesi primordiale si basa sulle seguenti ipotesi:

1. l'Universo è passato attraverso una fase in cui $T \geq 10^{12}K$, durante la quale tutte le sue componenti erano in equilibrio termico;
2. a quest'epoca valgono la relatività generale e le leggi della fisica delle particelle;
3. all'epoca della nucleosintesi l'Universo è omogeneo ed isotropo;
4. il numero di tipi di neutrini non sia alto $N_\nu < 5$ (assumeremo $N \approx 3$);
5. i neutrini non sono degeneri (devono avere un parametro di degenerazione trascurabile);
6. l'Universo non è composto in maniera tale da avere regioni in cui contiene materia ed altre in cui contiene antimateria (i.e. l'antimateria è trascurabile);

7. il campo magnetico sia trascurabile all'epoca della nucleosintesi;
8. la densità delle particelle esotiche (e.g. fotini, gravitini, ecc) sia trascurabile rispetto alla densità di fotoni.

Queste sono tutte ipotesi ragionevoli. L'ipotesi (3) viene fatta perché nel momento della nucleosintesi, $T^* \approx 10^9 K$ ($\leftrightarrow t^* \approx 300s$), la massa di barioni contenuta all'interno dell'orizzonte è molto piccola (i.e. $\sim 10^3 M_\odot$), mentre le abbondanze di elementi leggeri⁸ misurati sembrano essere omogenee su scale dell'ordine della decina di Mpc; le ipotesi (4), (5) ed (8) sono necessarie perché altrimenti avremmo un aumento nella densità dell'Universo all'epoca della nucleosintesi che, a sua volta, porterebbe ad una produzione eccessiva di elio; l'ipotesi (6) viene fatta perché nei confini di contatto tra tali regioni ci sarebbe una produzione di radiazione gamma che porterebbe ad un'estensiva fotodissociazione del deuterio, e di conseguenza ad una decrescita nella produzione di He⁴.

Vedremo più avanti le conseguenze di rilassare o non considerare alcune di queste assunzioni. Con queste ipotesi, comunque, il modello della nucleosintesi prevede l'esistenza di una radiazione di fondo isotropa a $5K$.

7.3.1 Il Rapporto Neutroni-Protoni

Nella Sezione 7.1 abbiamo visto che, fintanto che neutroni e protoni sono all'equilibrio termico, il rapporto tra le loro densità numeriche è dato dalla relazione

$$\frac{n_n}{n_p} \approx \exp \left[-\frac{Q}{K_B T} \right] = \exp \left[-\frac{1.5 \cdot 10^{10}}{T} \right] \quad (7.5)$$

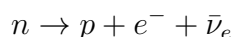
dove $1.5 \cdot 10^{10}$ è la differenza in massa tra neutroni e protoni, tradotta in energia. In Sezione 7.2.1 abbiamo visto che l'equilibrio termico è mantenuto dalle interazioni elettrodeboli che avvengono con tempo scala τ_{coll} ; questo tempo scala è di molto inferiore a τ_H fintanto che $T \geq T_{d\nu} \approx 1.5 \cdot 10^{10} K$ (i.e. fino al momento in cui i neutrini si disaccoppiano). La frazione di neutroni sul totale⁹ è data dalla

$$X_n = \frac{n_n}{n_n + n_p} = \frac{n_n}{n_{tot}}$$

che, in ragione della (7.5), al tempo $t_{d\nu}$ da

$$X_n(t_{d\nu}) \approx \frac{1}{1 + \exp 1.5} \approx 1.7 =: X_n(0)$$

Finché la temperatura non scende sensibilmente sotto la temperatura di disaccoppiamento dei neutrini $T_{d\nu} = 1.5 \cdot 10^{10} K$ si mantiene $X_n = X_n(0)$, il rapporto tra neutroni e protoni rimane fissato a questo valore. In realtà effettuando i calcoli in maniera adeguata (tenendo conto cioè del fatto che l'efficienza delle reazioni elettrodeboli in gioco è solo parziale) si troverebbe che tale rapporto rimane fissato al valore $X_n(0)$ fino ad una temperatura $T_n \approx 1.3 \cdot 10^9 K$, corrispondente al tempo $t_n \approx 20s$. Dopo questo tempo non c'è più equilibrio termico e i neutroni possono decadere in protoni tramite decadimento- β :



⁸Elementi leggeri = tutti gli elementi prodotti nella nucleosintesi, più leggeri di Li⁷

⁹Al secolo è solo una riscrittura del rapporto neutroni-protoni.

e quindi il rapporto X_n varia secondo la legge di decadimento radiattivo

$$X_n(t) = X_n(0) \exp\left(-\frac{t - t_n}{\tau_n}\right) \quad (7.6)$$

dove $t_n \approx 20s$ è il momento in cui iniziano tali decadimenti e $\tau_n \approx 900s$ è il tempo di vita tipico di un neutrone. Ora, solitamente τ_n viene considerato un tempo di vita piccolo ma in questo contesto è di molto maggiore dell'età dell'Universo, ciò significa che il decadimento radioattivo dei neutroni non è per niente efficiente in questa fase e quindi anche in questo caso il rapporto rimane invariato: $X_n = X_n(0)$.

Vedremo che la nucleosintesi comincia a tutti gli effetti non prima di $t^* \approx 10^2s$.

A temperature dell'ordine di T_n , le componenti rilevanti dell'Universo sono: fotoni, protoni e neutroni in rapporto $X_n(0)$, piccole quantità di particelle più pesanti e, per finire, neutrini che però sono già disaccoppiati.

7.3.2 Nucleosintesi dell'Elio

Poiché abbiamo deciso di non curarci per il momento delle particelle più pesanti di $\mathcal{H}^\Delta$, e considerato che per formare idrogeno basta che si formino protoni, tutto il problema della nucleosintesi primordiale si riduce al problema della formazione dell'elio. Della catena di reazioni chimiche che portano alla formazione di nuclei stabili di elio (peso atomico $A \geq 3$), il passo più difficile è la **formazione del deuterio**. Senza che il deuterio raggiunga una determinata quantità non sarà possibile formare elio. La quantità di deuterio che si forma dipende dalla reazione che lo produce

$$n + p \leftrightarrow d + \gamma \quad (7.7)$$

(si può verificare facilmente che questo canale di formazione ha un tempo scala caratteristico $\tau_{coll} \ll \tau_H$ nel periodo considerato); questo canale di formazione non è molto efficiente poiché porta ad un'alta formazione di fotoni con energia sufficiente a fotodissociare il deuterio appena formatosi. Le particelle n , p , d e γ seguono la distribuzione di Boltzmann e quindi le loro densità numeriche sono date dalla

$$n_i = \frac{g_i}{\hbar^3} \left(\frac{m_i K_B T}{2\pi} \right)^{3/2} \exp \left[\frac{\mu_i - m_i c^2}{K_B T} \right] \quad (7.8)$$

Poiché stiamo studiando un'epoca successiva all'ultima annichilazione il potenziale chimico, in teoria, non può più essere preso uguale a zero e quindi entra nelle equazioni, al contrario di quanto accadeva a temperature più elevate, in cui l'abbondanza di particelle era circa pari a quella delle corrispettive antiparticelle. Il potenziale chimico del deuterio è in relazione con quelli di protoni e neutroni: $\mu_p + \mu_n = \mu_d$. I pesi statistici delle specie in gioco sono $g_n = g_p = 2$ e $g_d = 3$.

Introduciamo ora le quantità $X_p = p/n_{tot} \approx 1 - X_n$ e $X_d = d/n_{tot}$. Dalle equazioni (7.7) e (7.8) si possono ricavare le relazioni di equilibrio tra n , p e d :

$$X_d = \frac{n_d}{n_{tot}} = \frac{1}{n_{tot}} \frac{g_d}{\hbar^3} \left(\frac{m_d K_B T}{2\pi} \right)^{3/2} \exp \left[\frac{\mu_d - m_d c^2}{K_B T} \right] \cdot \frac{X_n X_p n_{tot}^2}{\frac{g_n}{\hbar^3} \left(\frac{m_n K_B T}{2\pi} \right)^{3/2} \exp \left[\frac{\mu_n - m_n c^2}{K_B T} \right] \frac{g_p}{\hbar^3} \left(\frac{m_p K_B T}{2\pi} \right)^{3/2} \exp \left[\frac{\mu_p - m_p c^2}{K_B T} \right]}$$

semplificando arrivo alla

$$X_d = n_{tot} \frac{3}{4} \left(\frac{m_d}{m_n m_p} \right)^{3/2} \left(\frac{K_B T}{2\pi \hbar^2} \right)^{-3/2} \exp \left(\frac{B_d}{K_B T} \right) X_p X_n \quad (7.9)$$

dove le uniche quantità che non sono numeri sono n_{tot} , T , X_n e X_p e dove l'energia di legame del deuterio è $B_d = (m_n + m_p - m_d)c^2 = 2.2 \text{ MeV} \rightarrow 2.5 \cdot 10^{10} K$, quindi alla temperatura $T = 2.5 \cdot 10^{10} K$ l'esponenziale vale e^1 . La (7.9) è l'**equazione di Saha per il deuterio** che può essere riscritta

$$X_d = X_p X_n \exp \left[-29.33 + \frac{25.82}{T_{[9]}} - \frac{3}{2} \ln T_{[9]} + \ln (\Omega_{0,b} H^2) \right] \quad (7.10)$$

dove $T_{[9]} \equiv 10^9 K$ e $\Omega_{0,b} H^2$ è una scrittura della densità totale $n_{tot} \propto \rho_{0,b}$ utile per non fare assunzioni sul valore del parametro di Hubble, in particolare

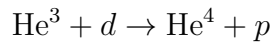
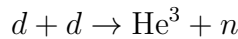
$$\Omega_{0,b} = \frac{\rho_{0,b}}{\rho_{0,crit}} \frac{3H^2}{8\pi G}$$

L'equazione (7.10) dipende solo debolmente da Ωh^2 .

Per $T_{[9]} \geq 10$ il valore di X_d è trascurabile: tutti i nucleoni sono liberi perché l'altra energia dei fotoni presenti nell'ambiente favorisce le reazioni di fotodissociazione. Il fatto che la nucleosintesi non possa procedere finché X_d non cresce a sufficienza è detto **collo di bottiglia del deuterio** e influenza molto l'eventuale abbondanza di elio. Quando $T_{[9]} \approx 1$ il valore di X_d non è più trascurabile. Abbiamo che $X_d \approx X_n X_p$ se

- $T_{[9]}^* \approx 0.9$, quando $\Omega_0 = 1$ che equivale ad un $t^* \approx 300s$;
- $T_{[9]}^* \approx 0.8$, quando $\Omega_0 = 0.02$ che equivale ad un $t^* \approx 200s$.

Quando $T < T_{[9]}^*$ il valore di X_d diventa significativo. A temperature inferiori ci attendiamo che tutti i neutroni siano vincolati in nuclei di deuterio. Quando però l'abbondanza di deuterio non è più trascurabile la catena di reazioni prosegue,



che hanno sezione d'urto molto grande quindi avvengono molto rapidamente, come conseguenza il deuterio che si forma all'uscita dal collo di bottiglia sopravvive poco libero e tutti i neutroni vengono velocemente intrappolati all'interno di nuclei di He^4 . Perciò si forma elio con un'abbondanza

$$Y = Y(t^*)$$

dato che la formazione è praticamente istantanea. Poiché poi, dopo la sintesi dell'elio, le uniche particelle libere presenti sono protoni e nuclei di elio e ricordando che la massa di elio in un sistema sta in rapporto 4 a 1 con il numero di nuclei (di elio), avremo

$$Y(t^*) = \frac{m_{\text{He}}}{m_{tot}} = 4 \frac{n_{\text{He}}}{n_{tot}} = 4 \frac{1}{2} \frac{n_n}{n_{tot}}$$

dove il fattore $\frac{1}{2}n_n$ nell'ultimo termine tiene conto del fatto che, dopo la sintesi dell'elio tutti i neutroni sono vincolati (a coppie) all'interno di nuclei di elio-4. Con l'ultima trovata, insieme alla (7.6) arriviamo a

$$Y = Y(t^*) = 2X_n(t^*) = 2X_n(0) \exp\left(-\frac{t^* - t_n}{\tau_n}\right) \quad (7.11)$$

dove, come prima, $t_n \approx 20s$, $\tau_n \approx 900s$ e t^* può valere tra i 200 e i 300 secondi. Sostituendo i valori nella (7.11) troviamo quindi $Y = 2 \cdot 0.17 \cdot 0.7 \approx 0.25$.

Science: it works, bitches!

Abbiamo utilizzato l'equazione di Saha, che dipende debolmente da Ω , per trovare la temperatura a cui il numero di neutrini diventa sufficiente per l'elio-sintesi. Il valore di Y così ottenuto dipende molto debolmente da Ω , quindi dal modello cosmologico, e spiega molto bene le abbondanze di elio osservate. La debole dipendenza da Ω è dovuta essenzialmente da due ragioni:

- il valore di X_n prima della nucleosintesi non dipende da Ω poiché è determinato da interazioni deboli tra nucleoni e leptoni e non da interazioni tra nucleoni;
- l'inizio della nucleosintesi è determinato dalla temperatura piuttosto che dalla densità di nucleoni.

Quindi con un modello basato esclusivamente sull'evoluzione in temperatura risolvo con successo il problema dell'abbondanza di elio. Ma dire "modello basato sull'evoluzione in temperatura" equivale a dire "modello del Big-Bang"! Con la scoperta della radiazione cosmica di fondo, questa argomentazione bastò per accantonare per sempre(?) il modello dello Stato Stazionario, a favore di quello del Big-Bang.

7.3.3 Commento sulle Abbondanze degli Elementi Primordiali

Sarebbe possibile, con argomenti simili a quelli esposti per l'elio, calcolare anche le abbondanze degli altri elementi leggeri che vengono prodotti dalla nucleosintesi primordiale ma siccome non vogliamo complicarci troppo la vita accontentiamoci di aver trovato che l'elio sta a $Y = 0.25$ che è già un gran bel risultato. Consideriamo ora la Figura 7.3 che mostra come variano le abbondanze di elio e di altri elementi leggeri rispetto (a.k.a. normalizzate) a quella di idrogeno, in funzione della densità barionica (n_{tot}) secondo il modello di nucleosintesi primordiale appena esposto.

Si può vedere, osservando l'andamento dell' He^4 che questo è approssimativamente indipendente dalla densità di materia barionica¹⁰. Abbiamo del resto visto che tale dipendenza è in effetti molto debole e che la variabile importante è la temperatura. A voler proprio essere pedanti si può notare che la curva è leggermente crescente, ciò dipende dal fatto che maggiore è la quantità di materia a disposizione, più precoce e completa sarà la produzione di He^4 .

Ragionando allo stesso modo per le reazioni intermedie e le particelle che vi prendono parte, si vede che l'abbondanza di deuterio (D) dipende fortemente dalla densità barionica ed il motivo è da ricercare nella dipendenza tra l'abbondanza di deuterio e l'efficienza di produzione dell' He^4 : maggiore è tale efficienza, maggiore sarà la quantità di deuterio consumata nella reazione.

¹⁰E non facciamo a meno di notare che il grafico è in scala logaritmica: Top!

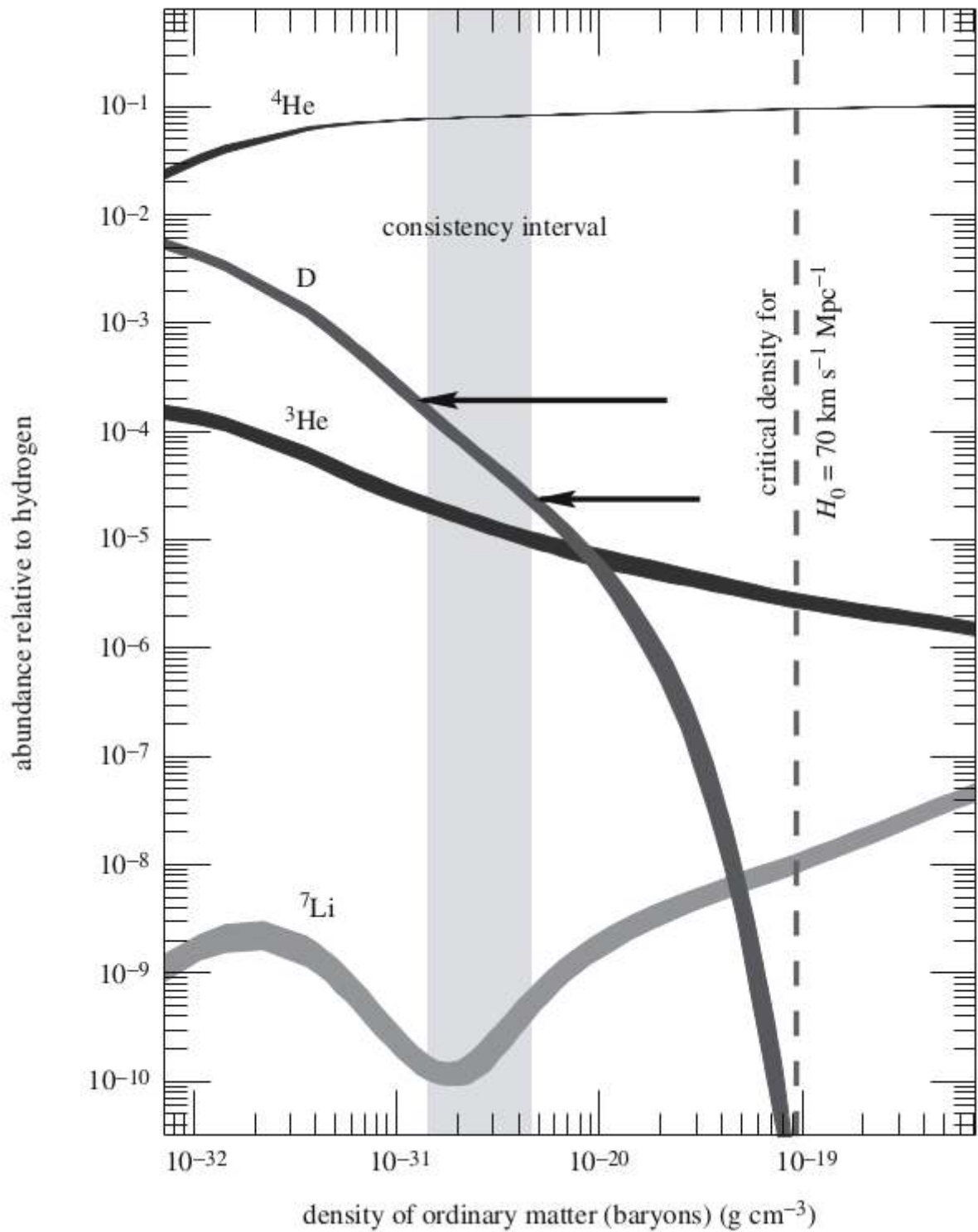


Figura 7.3: *Abbondanze di elementi leggeri, determinate da calcoli numerici, in funzione della densità di materia, come esposto nel testo. Le frecce marcano le possibili abbondanze di deuterio. [Immagine tratta da Schramm & Turner (1996)]*

Poichè anche l' He^3 prende parte alla reazione di sintesi dell' He^4 vale lo stesso ragionamento.

Il modello della nucleosintesi primordiale prevede inoltre la formazione di Li^7 il cui andamento appare più complesso. Questi nuclei si possono infatti formare attraverso due canali: o tramite l'aggregazione di He^4 con He^3 , o tramite l'aggregazione di due He^4 a formare Be^8 che poi decade.

Questi altri elementi leggeri possono essere misurati nell'Universo, tramite lo studio di spettri stellari e galattici, ma la stima delle abbondanze non è facile. Ho infatti delle difficoltà dovute alle abbondanze, molto inferiori rispetto a quella di He^4 , che essi hanno e al fatto che tali elementi sono sintetizzati anche negli interni stellari, diventa quindi importante riuscire a discriminare quanta parte dell'elemento che osserviamo è dovuta alla sintesi primordiale e quanta a quella stellare.

Grazie ai modelli dell'evoluzione stellare si riescono a fare delle predizioni a riguardo e questo ci consente di restringere le abbondanze teoriche ad un **intervallo di consistenza**. In figura sono indicati da delle frecce gli estremi di inizio e termine di tale intervallo: l'incertezza sulla stima dell'abbondanza del deuterio è quasi del 100%. Possiamo ottenere intervalli simili anche per He^3 e Li^7 , riuscendo così a mettere dei limiti piuttosto stringenti al nostro modello. In parole povere, questo intervallo di consistenza ci dice per quali valori di Ω_b i dati ottenuti teoricamente sono riprodotti dai dati osservativi; otteniamo

$$0.01 < \Omega_{0,b} < 0.15$$

Questo risultato ci dice che deve esserci un'importante componente non barionica che contribuisce al bilancio totale se vogliamo avere $\Omega \approx 1$. Per anni questo risultato è stato l'evidenza più importante che, se il nostro Universo deve essere piatto, non può essere composto di soli barioni. Questa stima della densità barionica dell'Universo è il secondo grande successo del modello della nucleosintesi primordiale, oggi comunque le migliori stime di $\Omega_{0,b}$ le otteniamo con lo studio della CMB, che vedremo più avanti.

7.4 Verso la Ricombinazione

Fino a questo momento nella storia evolutiva dell'Universo abbiamo visto la radiazione dominare (tutte le componenti erano relativistiche, $w = 1/3$), all'uscita dalla nucleosintesi primordiale l'Universo si raffredda da $T \approx 5 \cdot 10^9 K$ fino a circa $T \approx 10^4 K$, questo periodo viene chiamato **era radiativa**, periodo nel quale la densità è dominata dai fotoni e dai neutrini che, anche se disaccoppiati, danno un contributo di poco inferiore. L'era radiativa è l'ultimo momento nella storia dell'universo in cui sono le particelle relativistiche a dominare, al termine sarà la materia a prevalere. La densità di fotoni e neutrini (particelle relativistiche) è data dalla

$$\rho_{\gamma,\nu} = \rho_{0,R} \left(\frac{T}{T_{0,R}} \right)^4 + \rho_{0,\nu} \left(\frac{T_\nu}{T_{0,\nu}} \right)^4 = \rho_{0,R} K_0 \left(\frac{T}{T_{0,R}} \right)^4 = \rho_{0,R} K_0 (1+z)^4$$

con $\rho_{0,\nu} = 0.68 \rho_{0,R}$ quando $N_\nu = 3$ e $K_0 = 1 + 0.68$. La densità di materia è

$$\rho_m = \rho_{0,crit} \Omega_{0,M} (1+z)^3 \approx \rho_{0,crit} \Omega_0 (1+z)^3$$

Abbiamo visto che il passaggio avviene quando la densità (di energia) dei fotoni eguaglia la densità (di energia) della materia. Questo momento nella storia dell'Universo prende il nome di **equivalenza** e viene localizzata nel tempo dalla relazione $\rho_R(z_{eq}) = \rho_M(z_{eq})$, dalla quale otteniamo $z_{eq} \leq 10^4$ e $T_{eq} \approx 3 \cdot 10^4 K$.

A queste alte temperature sia l'elio che l'idrogeno (principali componenti della materia barionica) sono completamente ionizzati ed esistono sotto forma di ioni (H^+ e He^{++}). Gradualmente la temperatura cala e, diventando meno relativistica, subisce le reazioni chimiche di **ricombinazione**¹¹



La successione di queste ricombinazioni al calare della temperatura porta alla seguente situazione:

1. ad una $T \approx 10^4 K$ abbiamo 50% He^{++} e 50% He^+ , 100% H^+ ;
2. ad una $T \approx 7 \cdot 10^3 K$ abbiamo 50% He^+ e 50% He , 100% H^+ ;
3. ad una $T_{rec} \approx 4 \cdot 10^3 K$ abbiamo 100% He , 50% H^+ e 50% H ;

con il tempo che scorre da (1) a (3). Solitamente si definisce **epoca della ricombinazione** il momento in cui viene raggiunta la situazione descritta nel punto (3), ovvero quando circa il 50% della materia è ricombinata, infatti solitamente si trascura l'esistenza dell'elio nel periodo per il quale $T > T_{rec}$. Tale periodo viene definito **epoca del plasma**.

Epoca del Plasma: Il plasma che consideriamo è composto di protoni, elettroni e fotoni ad una temperatura $T > T_{rec}$. In questa situazione il plasma è un esempio di “buon plasma”, nel senso che il contributo al bilancio complessivo di energia delle interazioni Coulombiane tra le particelle è molto inferiore della loro energia termica, deve cioè valere la

$$\underbrace{4\pi n_{ion} e^2 \lambda^2}_{Coulombiana} \ll \underbrace{K_B T}_{termica}$$

che equivale a richiedere

$$\lambda_D \gg \lambda \quad (7.15)$$

dove λ_D è il **raggio di Debye**, definito come

$$\lambda_D := \left(\frac{K_B T}{4\pi n_{ion} e^2} \right)^{1/2}$$

, esso definisce una regione sferica intorno ad uno ione, se questa viene attraversata da un'altro ione le due particelle interagiscono Coulombianamente. Dalla densità numerica di ioni n_{ion} si può ottenere la loro separazione media

¹¹Abbiamo già sottolineato che a rigor di logica si dovrebbe parlare di “combinazione”, poichè prima di questo momento i nuclei atomici non sono mai esistiti combinati.

$$\lambda \approx n_{ion}^{-1/3}$$

In un plasma di questo tipo gli effetti collettivi di schermo delle cariche tra uno ione e l'altro sono trascurabili entro la sfera di Debye. Per quanto detto, l'interazione Coulombiana tra elettrone e protone "è sentita" soltanto mentre l'elettrone attraversa la sfera di Debye del protone. Il tempo tipico impiegato per attraversare questa regione,

$$\tau_e = \omega_e^{-1} = \left(\frac{m_e}{4\pi n_e e^2} \right)^{1/2} \approx 2.2 \cdot 10^8 T^{-3/2} s$$

va comparato con il tempo caratteristico in cui un elettrone perde energia attraverso interazioni con fotoni (scattering),

$$\tau'_{e,\gamma} = \frac{3m_e}{4\sigma_T \rho_{RC}} = 4.4 \cdot 10^{21} T^{-4} s$$

dovrà essere

$$\tau_e \ll \tau'_{e,\gamma} \quad (7.16)$$

equivalente alla (7.15). Sostituendo nelle relazioni trovate per τ_e e $\tau'_{e,\gamma}$ le temperature agli estremi di questa fase si vede che la (7.16) è valida per tutta l'epoca del plasma. La (7.16) ci dice anche che gli effetti collettivi nel plasma sono insignificanti in questo caso (i.e. la probabilità che ci sia una collisione elettrone-fotone durante una collisione elettrone-positrone è molto bassa) e quindi siamo in condizioni di **plasma perfetto**.

D'altra parte però, al redshift a cui ci troviamo, elettroni e fotoni sono fortemente accoppiati. Un plasma perfetto è completamente opaco alla radiazione¹², il libero cammino medio dei fotoni è piccolo e gli scattering Compton mantengono gli elettroni all'equilibrio termico con la radiazione. Essendo poi il tempo di rilassamento elettroni-positroni (i.e. il tempo che impiegano elettroni e positroni ad andare all'equilibrio) molto piccolo ci attendiamo che le particelle del fluido siano all'equilibrio. Nel momento in cui il plasma diventa otticamente sottile, cosa che avviene all'incirca all'epoca della ricombinazione, i fotoni acquisiscono un libero cammino medio praticamente infinito. La radiazione generata è quindi isotropa ed omogenea perché tale era il plasma, inoltre ha uno spettro di corpo nero poiché il plasma cosmologico era all'equilibrio termico con la radiazione. Questa radiazione sarebbe responsabile del **Cosmic Microwave Background (CMB)** osservato oggi.

7.4.1 Ricombinazione dell'Idrogeno

Negli ultimi stadi dell'epoca del plasma le particelle p , e^- , H e γ (ignoriamo l'elio come già detto) sono accoppiate tramite le reazioni (7.12) - (7.14). Supponendo che queste reazioni mantengano le particelle all'equilibrio termico, possiamo studiare il processo di ricombinazione dell'idrogeno, che segna la fine dell'epoca del plasma e l'inizio dell'era della materia neutra. Definiamo la **frazione di ionizzazione**

$$x = \frac{n_e}{n_{tot}} = \frac{n_e}{n_p + n_H}$$

¹²c'è da dire anche che quando il volume da cui un fotone deve fuggire è tutto il volume dell'Universo è abbastanza difficile che il fluido non sia opaco.

dove n_p è la densità di protoni (i.e. idrogeno ionizzato), n_H è la densità di idrogeno neutro e la densità di elettroni è $n_e \approx n_p$ per la conservazione della neutralità di carica.

L'energia di legame dell'idrogeno neutro è $B_H = 13.6\text{eV}$ che corrisponde ad una temperatura $T = 1.6 \cdot 10^5 K$. Confrontando questa temperatura con quelle elencate all'inizio della Sezione viene da chiedersi perché non sia stata raggiunta già la completa neutralità. Studiamo quindi la distribuzione di particelle, essendo queste non-relativistiche possiamo applicare la statistica di Boltzmann al plasma. Otteniamo così la densità numerica della i -esima specie di particella dalla solita ((7.8))

$$n_i = \frac{g_i}{h^3} \left(\frac{m_i K_B T}{2\pi} \right)^{3/2} \exp \left[\frac{\mu_i - m_i c^2}{K_B T} \right]$$

i potenziali chimici che ci interessano sono legati dalla

$$\mu_p + \mu_e = \mu_H$$

poiché i fotoni sono in equilibrio il loro potenziale chimico è nullo. I pesi statistici di protone ed elettrone sono $g_p = g_e = 2$, quello dell'idrogeno neutro è $g_H = 4$. Le masse delle particelle in gioco sono legate dalla

$$m_H c^2 = (m_p + m_e) c^2 - B_H$$

Da tutte queste relazioni trovate è facile calcolare

$$\begin{aligned} \frac{n_e n_p}{n_H n_{tot}} &= \frac{n_e^2}{n_{tot}(1 - n_{tot})} = \frac{x^2}{1 - x} = \\ &= \frac{\frac{g_e}{h^3} \left(\frac{m_e K_B T}{2\pi} \right)^{3/2} \exp \left[\frac{\mu_e - m_e c^2}{K_B T} \right] \frac{g_p}{h^3} \left(\frac{m_p K_B T}{2\pi} \right)^{3/2} \exp \left[\frac{\mu_p - m_p c^2}{K_B T} \right]}{n_{tot} \frac{g_H}{h^3} \left(\frac{m_H K_B T}{2\pi} \right)^{3/2} \exp \left[\frac{\mu_H - m_H c^2}{K_B T} \right]} \end{aligned}$$

da cui otteniamo l'**equazione di Saha** corrispondente alla reazione di ricombinazione dell'idrogeno:

$$\frac{x^2}{1 - x} = \frac{1}{n_{tot}} \left(\frac{m_e K_B T}{2\pi \hbar^2} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{B_H}{K_B T} \right] \quad (7.17)$$

Ci dice come varia [una funzione del]la frazione di ionizzazione al variare della temperatura e della densità totale di particelle. Il fattore moltiplicativo dell'esponenziale infatti sta volta non può essere trascurato poiché dipende in realtà dal numero di particelle barioniche, numero che a sua volta dipende dal modello cosmologico.

In Tabella 7.1 sono riportati alcuni valori della frazione di ionizzazione al variare del redshift (ed equivalentemente, della temperatura) per diversi modelli cosmologici. Consideriamo l'idrogeno ricombinato quando $x \approx 0.5$, dalla Tabellasi può vedere come la frazione di ionizzazione non vari molto con il parametro ΩH^2 e quasi tutti i modelli raggiungano questa condizione nell'intervallo $1400 < z < 1600$. È una buona approssimazione prendere $z_{rec} \approx 1500$.

La formula di Saha è valida fintanto che c'è equilibrio termico. Si può affermare che approssimativamente questa condizione è vera quando il tempo scala di ricombinazione $\tau_{rec} := x/\dot{x}$ è molto più piccolo del tempo scala di espansione dell'Universo τ_H . Questa

	z :	2000	1800	1600	1400	1000
	T :	5400 K	4860 K	3780 K	3240 K	2700 K
ΩH^2						
10		.995	.914	.358	.004	$1 \cdot 10^{-5}$
1		.999	.990	.732	.108	$4 \cdot 10^{-5}$
0.1		1.	1.	.954	.303	$1 \cdot 10^{-4}$
0.01		1.	1.	.995	.664	$3 \cdot 10^{-4}$

Tabella 7.1: Valori della frazione di ionizzazione per diversi redshift e temperature, per 4 diversi modelli cosmologici.

condizione è valida per $z > 2000(\Omega_0 h^2)^{-1}$ se x è dell'ordine dell'unità. È quindi possibile che processi fisici al di fuori dell'equilibrio termico abbiano modificato significativamente la storia di ionizzazione cosmologica. Studi di questo tipo sono stati fatti ma sono molto più complessi della trattazione che abbiamo fatto qui. C'è in ogni caso consenso generale che il valore di x durante la ricombinazione ($z \approx 1000$) sia probabilmente di un fattore 100 maggiore di quello predetto dall'equazione di Saha (7.17). Tutti i calcoli prevedono comunque che la frazione di ionizzazione tenda a $10^{-4} \div 10^{-5}$ per $z \rightarrow 0$.

7.5 Era della Materia

L'era della materia comincia a z_{eq} e continua ancora oggi. Prima di questo momento l'altissima pressione di radiazione si oppone al collasso gravitazionale. Dall'inizio dell'era della materia tale pressione diventa trascurabile e le perturbazioni di densità sono libere di crescere. Un'altra importante conseguenza della ricombinazione dell'idrogeno è che gli scatter tra materia e radiazione diventano trascurabili, quindi

1. avviene il disaccoppiamento termico tra materia e radiazione;
2. il libero cammino medio dei fotoni diventa infinito, abbiamo la CMB.

La (1) non avviene subito a z_{eq} perchè la ionizzazione residua rende possibili degli scambi di energia tra materia e radiazione tramite diffusione Compton. Superato $z_{dec} \approx 300$ le interazioni diventano trascurabili e la materia si raffredda adiabaticamente secondo la legge $T_m \propto (1+z)^2$ (Figura 7.4).

Si possono fare delle importanti considerazioni nell'epoca post-ricombinazione introducendo la **profondità ottica**, τ , dovuta allo scattering Compton, ci dice quanta parte di un segnale emesso da una sorgente viene attenuata dal passaggio attraverso un determinato spessore di un mezzo (tale attenuazione è una quantità adimensionale che va come $\exp(-\tau)$). La probabilità che avvenga uno scattering è data dalla

$$dP = -\frac{dN_\gamma}{N_\gamma} = -\frac{dI}{I} = -d\tau \quad (7.18)$$

dove N_γ è il flusso di fotoni. Vediamo quanto vale

$$-d\tau = \frac{dt}{\tau_{e,\gamma}} = n_e c \sigma_T dt = \frac{\rho_m}{m_p} c \sigma_T dt$$

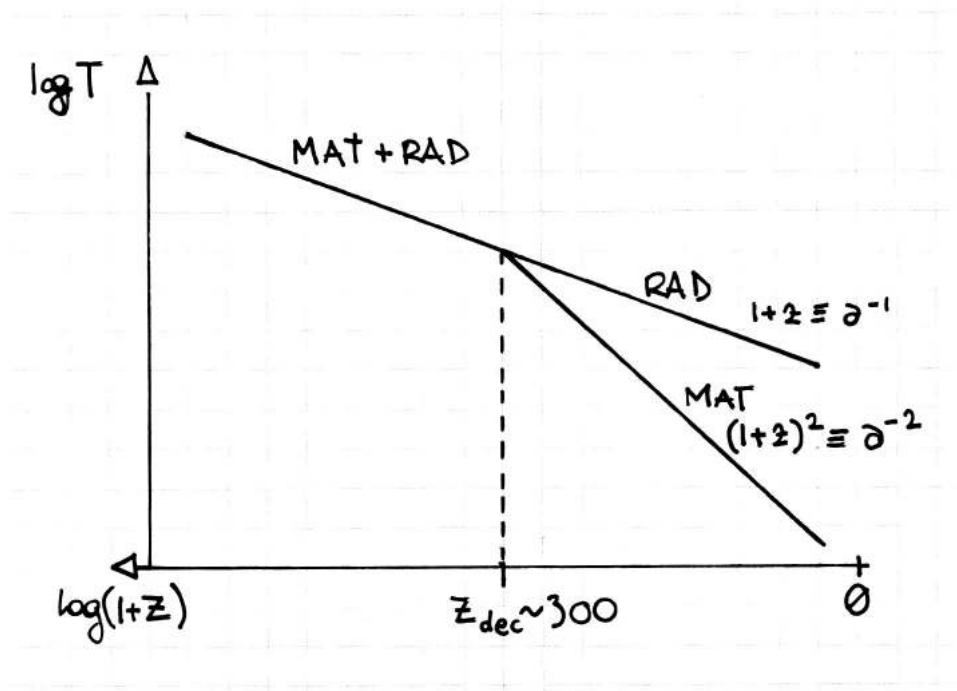


Figura 7.4: Andamento della temperatura di radiazione e materia prima e dopo il disaccoppiamento.

dove $\tau_{e,\gamma}$ è il tasso con cui avvengono gli scatter tra elettroni e fotoni, ρ_m è la densità tipica della materia e m_p è la massa tipica delle particelle in gioco, per noi solo idrogeno, quindi è la massa di un protone. Poiché non tutta la materia è ionizzata e poiché siamo interessati ad avere il tutto in funzione del redshift, scriveremo

$$d\tau = -x \frac{\rho_m}{m_p} c \sigma_T \frac{dt}{dz} dz \quad (7.19)$$

Integriamo ora la (7.18) ed otteniamo come varia il flusso ricevuto da una sorgente a causa degli scatter

$$I(t_0, z) = I(t) \exp[-\tau(z)]$$

che per la (7.19) diventa

$$I(t_0, z) = I(t) \exp \left[- \int_0^z x \frac{\rho_m}{m_p} c \sigma_T \frac{dt}{dz} dz \right] \quad (7.20)$$

La profondità ottica τ dipende quindi dalla frazione di ionizzazione attraverso σ_T e attraverso $\frac{dt}{dz}$. La (7.20) ci dice quanto è variato il flusso di radiazione di una sorgente, $I(t)$, dopo gli scatter che ha subito dal redshift di emissione z ad oggi t_0 .

Vogliamo sapere allora quale sia il redshift di ultimo scatter, ovvero vogliamo trovare a che redshift il libero cammino medio dei fotoni è diventato infinito, o, ancora, da che redshift proviene la CMB. Calcoliamo la probabilità che l'ultimo scatter subito da un fotone sia avvenuto ad un redshift compreso tra z e $z + dz$:

$$-\frac{d}{dz} [1 - \exp(-\tau)] = \exp[-\tau(z)] dt = g(z) dz$$

La quantità $g(z)$ si chiama **visibilità** della superficie di ultimo scattering, ci attendiamo che $\tau_{ls} = 1$; con una forma funzionaria per la frazione di ionizzazione adeguata¹³ possiamo trovare che $z_{ls} = 1100$. I tre valori del redshift trovati ($z_{rec} = 1500$, $z_{ls} = 1100$, $z_{dec} = 300$) individuano la localizzazione spazio-temporale di una serie di conseguenze dello stesso fenomeno, cioè la ricombinazione dell'idrogeno¹⁴.

È in questo momento che entrano in gioco le strutture collassate di materia. Ad un certo punto, dopo la ricombinazione, delle aggregazioni di materia collasseranno per formare le stelle. Quando questi oggetti si accendono producono una nuova emissione di energia che porta ad una nuova ionizzazione della materia di origine diversa da quella precedente, parliamo di **epoca della re-ionizzazione**.

Le prime stelle che si formano nell'Universo sono oggetti estremamente massicci (per una serie di motivi che non stiamo a dire ma che dovremmo sapere), producono quindi un intenso campo di radiazione molto energetica in grado di reionizzare localmente la materia. Se ammettiamo che, per argomenti legati alla fisica di formazione delle strutture cosmiche, l'Universo si reionizzi completamente ad un $z_{reh} = 10 \pm 5$, cosa succede alla CMB¹⁵? Mettiamoci ad un redshift compreso tra l'epoca della reionizzazione ed oggi $0 < z < z_{reh}$ e supponiamo che la frazione di ionizzazione in questo intervallo sia elevata, $x \approx 1$. Lo spessore ottico allora varrà

$$\tau = \int d\tau = \int x \frac{\rho_m}{m_p} \sigma_{TC} \frac{dt}{dz'} dz'$$

per $z < z_{reh}$ possiamo prendere $x \approx 1$, appunto, e

$$\frac{dt}{dz} = -\frac{1}{H_0} (1+z)^{-2} (1+\Omega_0 z)^{-1/2}$$

da cui, ricordando anche che $\rho_m = \rho_{0,crit} \Omega_{0,m}$,

$$\tau = \frac{\rho_{0,crit} \Omega_{0,m} \sigma_{TC}}{m_p H_0} \int \frac{(1+z)^3}{(1+z)^2 (1+\Omega_0 z)^{1/2}} dz \approx 10^{-2} (\Omega_0 h^2)^{1/2} z^{3/2}$$

Quella appena trovata è la profondità ottica in funzione del redshift (e del modello cosmologico), ottenuta ammettendo che ad un certo punto della sua storia l'Universo si sia re-ionizzato. In pratica mi permette di andare indietro nella storia della profondità ottica, previa l'ammissione che questa sia andata diminuendo da un certo istante in poi.

Va da se che questa formula può essere usata per trovare z_{ls} , ponendo $\tau = 1$. Otteniamo

$$z_{ls} \approx 20 (\Omega_0 h^2)^{1/3}$$

Questo è possibile solo perché $z_{reh} < z_{ls}$, se fosse vero il contrario lo spettro della CMB risulterebbe falsato. Anche in questo discorso entra il raggio dell'orizzonte nel senso delle scale sulle quali avvengono i fenomeni. In realtà non è che ho capito troppo bene..

¹³Andrebbe tenuto conto dei processi al di fuori dell'equilibrio termico che avvengono durante la ricombinazione, quindi la formula di Saha vista in Sezione 7.4.1 non è sufficiente.

¹⁴A z_{rec} l'idrogeno si ricombina quindi il numero degli scattering diminuisce fino ad arrivare all'ultimo a z_{ls} , non esistendo più interazioni tra radiazioni e materia, le due componenti si disaccoppiano a z_{dec}

¹⁵radiazione poco energetica che attraversa un mezzo altamente ionizzato subisce inverse Compton...

7.5.1 La CMB (cenni)

Chiudiamo questa prima parte del corso accennando a cosa succede alla CMB dal redshift di ultimo scattering ad oggi. Abbiamo già detto innanzitutto che ci attendiamo che, quando viene generata, questa radiazione abbia uno spettro di corpo nero, poiché i fotoni che la compongono sono prodotti da un mezzo all'equilibrio termico, omogeneo ed isotropo. Niente ci assicura però che ancora oggi lo spettro della CMB abbia la stessa forma di quando è stato prodotto. La legge di Planck per la radiazione di corpo nero ci dice che

$$I(\nu) = \frac{4\pi\hbar\nu^3}{c^2} \left[\exp\left(\frac{h\nu}{K_B T}\right) - 1 \right]^{-1} \quad (7.21)$$

La CMB avrà mantenuto lo stesso spettro di corpo nero se e solo se il numero di fotoni che la compongono

$$N_\gamma = \left[\exp\left(\frac{h\nu}{K_B T}\right) - 1 \right]$$

non è variato sensibilmente da z_{ls} .

In ogni caso, ammettendo che questo sia vero, bisogna considerare l'effetto del redshift cosmologico su tali fotoni: $\nu \propto a^{-1}$. Perciò, se il numero N_γ si conserva, la temperatura del CN deve adeguarsi a questo andamento: $T \propto a^{-1}$. Questo significa che ci attendiamo si uno spettro di corpo nero ma traslato in temperatura. Lo sappiamo tutti che tale spettro è stato osservato vero? In Figura 7.5 il fit dello spettro di CN sui dati ottenuti dalla sonda COBE dal quale l'ottima stima per la temperatura di CN della CMB:

$$T_{CMB} = 2.726 \pm 0.010$$

Notare come le barre di errore siano presenti ma, ad eccezione che per gli ultimi due punti a basse frequenze, sono talmente piccole da non essere visibili!!!! SBAM!!!!

I fotoni sono in un rapporto 10^9 con i barioni. È possibile dimostrare che il tempo in cui vengono ritermalizzate delle eventuali oscillazioni nello spettro di CN della CMB, dovute a fattori esterni (i.e. **anisotropie secondarie**) è estremamente breve. Deduciamo quindi che le deviazioni osservate dallo spettro di CN devono essere oscillazioni generatesi con la radiazione stessa. Studieremo in dettaglio queste che si chiamano **anisotropie** (primarie) **della radiazione cosmica di fondo**.

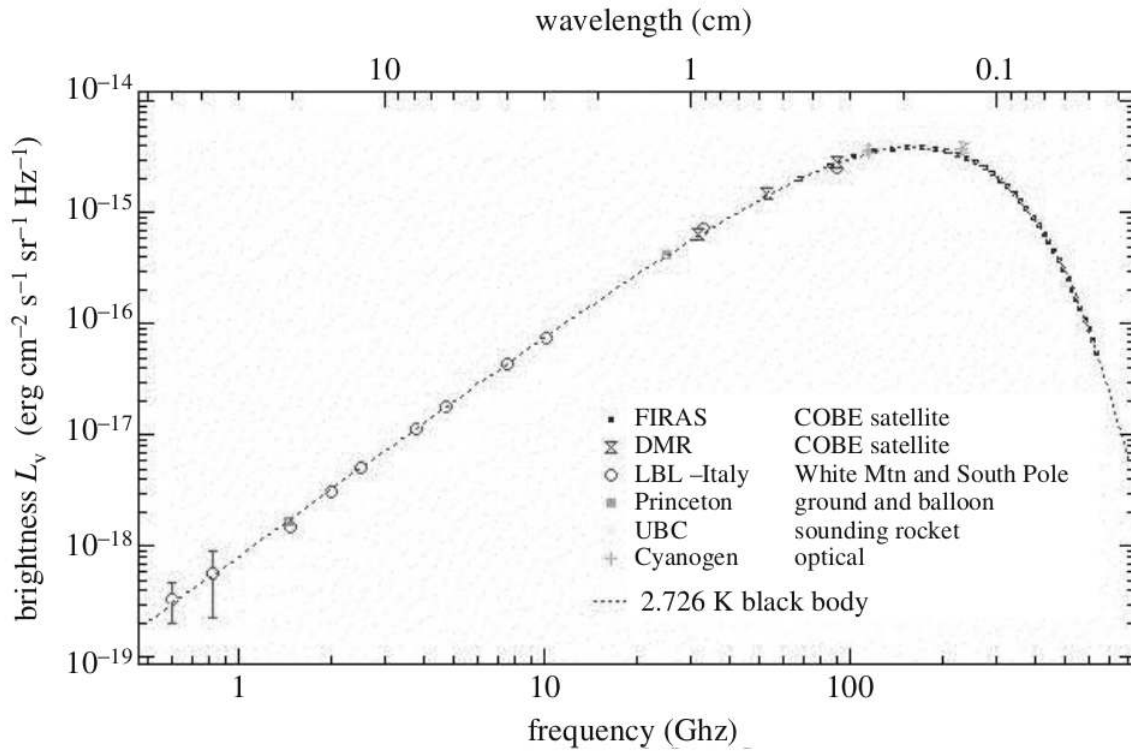


Figura 7.5: Spettro della radiazione cosmica di fondo come misurata dallo strumento FIRAS a bordo del satellite COBE insieme ad altri risultati sperimentali. Lo spettro di corpo nero di best-fit ha una temperatura di $T_{\text{CMB}} = 2.726 \pm 0.010$: grado di confidenza 95%.

Parte II

Teoria di Formazione delle Strutture

Capitolo 8

Teoria di Jeans in Universi in Espansione

Giunti finalmente all'era della materia, ci occuperemo ora della formazione delle strutture su grande scala. La teoria di Jeans che andiamo a presentare prevede la formazione delle strutture come conseguenza di **instabilità gravitazionali**. Si pensa che a guidare questo processo siano le **perturbazioni di densità**, piccolissime oscillazioni nella densità del fluido primordiale, rilevate osservativamente nello spettro della CMB per la prima volta nel 1991 (precedentemente ritenuta omogenea).

La perturbazione di densità è una quantità adimensionale definita come

$$\delta := \frac{\delta\rho}{\rho} = \frac{\rho - \bar{\rho}}{\bar{\rho}} \quad (8.1)$$

Essendo la densità una quantità sempre positiva, potremo avere $-1 \leq \delta < +\infty$, ovvero sia regioni sovradense che regioni sottodense. Osservativamente le perturbazioni di densità corrispondono a piccole fluttuazioni nella temperatura della CMB dell'ordine di

$$\frac{\delta T}{T} \approx 10^{-5}$$

, le perturbazioni di densità primordiali che assumeremo saranno dello stesso ordine di grandezza.

Nell'Universo attuale (intorno a noi) sappiamo che le fluttuazioni di densità sono mediamente dell'ordine di 10^2 , vogliamo quindi capire come si arriva da $z \approx 10^3$ con $\delta \approx 10^{-5}$ a $z = 0$ con $\delta \approx 10^2$. Ci chiediamo quindi come crescono le perturbazioni di densità primordiale.

L'**instabilità gravitazionale** è responsabile di questa crescita. Prima dell'era della materia tali instabilità non sono possibili a causa dell'accoppiamento tra materia e radiazione. Abbiamo però detto che, fintanto che la ricombinazione dell'idrogeno è in corso, la pressione di radiazione è troppo forte perché la materia barionica possa collassare. Fortunatamente però la materia non barionica in questo periodo è già da molto più tempo disaccoppiata dalla radiazione. Al momento della ricombinazione sono quindi presenti dei grandi aloni di materia non barionica già collassati, le grandi buche di potenziale ad essi associate guidano l'addensamento della materia barionica.

Altro fattore che entra in gioco in questa trattazione è l'espansione dell'Universo che mentre le strutture si avviano verso il collasso genera un feedback negativo che vi si oppone. L'efficienza con cui la materia collassa dipenderà quindi anche dal modello cosmologico

assunto. La costante cosmologica entra perciò nella modellistica come una complicazione del processo di collasso¹.

Attualmente supponiamo che le componenti dell'Universo abbiano parametro di densità

$$\begin{cases} \Omega_{0,b} = 0.04 & \text{materia barionica} \\ \Omega_{0,DM} = 0.26 & \text{materia non barionica} \\ \Omega_{0,\Lambda} = 0.7 & \text{costante cosmologica} \end{cases}$$

Assumiamo quindi (forti delle nostre convinzioni pregresse) di vivere in un Universo piatto.

8.1 Scala di Jeans

Diamo quì una descrizione semplicistica del concetto di **scala di Jeans** che determina la scala che un agglomerato di materia con determinate caratteristiche termodinamiche (e.g. densità, temperatura, ecc) deve avere per poter collassare, una descrizione più dettagliata verrà fornita in funzione del modello cosmologico adottato.

Tratteremo con delle grandezze caratteristiche per descrivere il fenomeno del collasso delle strutture. Lavoreremo con la densità ρ , la scala R , la massa $M \propto \rho R^3$, di materia barionica e non. La materia oscura è non collisionale quindi come velocità caratteristica di questa componente prenderemo la dispersione di velocità, mentre per la materia barionica potremo usare la velocità del suono c_s .

La teoria di Jeans si fonda sull'idea di base che siano presenti due processi che si oppongono

- l'**energia potenziale gravitazionale** che tende a far aggregare la materia

$$E_g = -\frac{GM^2}{R} = -\frac{GM}{R}\rho R^3 = -GM\rho R^2 \quad (8.2)$$

- l'**energia cinetica** associata all'agitazione termica delle particelle, che tende a contrastare il collasso

$$E_k = \frac{1}{2}Mv^2 \quad (8.3)$$

dove v è una velocità tipica del processo fisico in esame (i.e. la velocità del suono). Affinché sia possibile un collasso di materia la prima dovrà prevalere sulla seconda. Possiamo quindi definire una scala che discrimini tra le due eventualità, è la scala in cui le due energie sono uguali, $E_g = E_k$, da cui, eguagliando la (8.2) alla (8.3), otteniamo

$$\frac{v^2}{2} = \frac{G}{R}\rho R^3 = GR^2\rho$$

Abbiamo quindi perfetto equilibrio alla **scala di Jeans**

$$R_J := v\sqrt{\frac{1}{2G\rho}} \quad (8.4)$$

¹Ci rema contro la maledetta!

ovvero abbiamo che $R_J \propto v\rho^{-1/2}$.

Un altro modo per affrontare il problema è quello di vederlo come un bilancio di forze,

- la forza di attrazione gravitazionale che tende ad avvicinare le particelle

$$F_g = \frac{GM}{R^2}$$

;

- e la forza di pressione che tende ad allontanarle

$$F_p = p \frac{R^2}{M}$$

,

dove p è la pressione.

L'espressione delle due forze è da intendersi per unità di massa. Ricordando che si definisce la velocità del suono come

$$c_s = \frac{\partial p}{\partial \rho} \approx \frac{p}{\rho}$$

,

possiamo riscrivere la forza di pressione come

$$F_p \approx \frac{\rho c_s^2 R^2}{\rho R^3} = \frac{c_s^2}{R}$$

.

Equivalentemente a quanto detto prima, esisterà una scala alla quale le due forze si bilanciano

$$G\rho R = \frac{GM}{R^2} \equiv \frac{c_s^2}{R}$$

,

tale scala è la scala di Jeans, infatti otteniamo nuovamente

$$R_J = \frac{c_s}{\sqrt{G\rho}} \propto \frac{c_s}{\sqrt{\rho}}$$

.

Ultimo modo che vediamo per arrivare allo stesso risultato è quello di confrontare dei tempi scala:

- il tempo scala della gravità, ovvero il tempo che impiega una particella ad arrivare dal confine della regione in esame al centro per effetto dell'attrazione gravitazionale, detto **tempo di free-fall**

$$\tau_{ff} \propto \frac{1}{\sqrt{G\rho}}$$

;

- il tempo tipico idrodinamico, ovvero il tempo che una perturbazione impiega a propagarsi attraverso tutta la regione in esame, detto **crossing-time**

$$\tau_{cross} = \frac{2R}{c_s}$$

Otteniamo la scala di Jeans quando i due tempi coincidono, $\tau_{ff} = \tau_{cross}$, da cui

$$R_J = \frac{c_s}{2\sqrt{G\rho}} \propto \frac{c_s}{\sqrt{\rho}}$$

ancora, come prima. Le scale ottenute con i diversi metodi non sono identiche per motivi di approssimazione. Alla scala di Jeans può essere associata una massa tipica, detta **massa di Jeans** nientemeno, data dalla

$$M_J \propto \rho R_J^3 \quad (8.5)$$

La morale del discorso è che non è sufficiente avere delle sovradensità perchè la materia possa collassare portando alla formazione delle strutture, ma esistono anche delle scale da superare: dovremo avere $R > R_J$ o, equivalentemente, $M > M_J$. Cercheremo la forma di queste grandezze scala in diversi casi.

8.1.1 Universi Statici

Nella teoria di Jeans si assume una soluzione nota al problema a cui viene aggiunta una piccola perturbazione e se ne studia poi l'evoluzione. La trattazione che ne facciamo è di stampo newtoniano, assumiamo un fluido perfetto caratterizzato da 5 grandezze: densità ρ , velocità $\mathbf{v}$, potenziale gravitazionale ϕ , pressione p ed entropia S . Il sistema risolutivo è quindi dato dalle 5 equazioni della fluidodinamica

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 & (1) \text{ eq.ne di conservazione della massa} \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla \rho - \nabla \phi & (2) \text{ eq.ne di Eulero (cons. momento)} \\ \nabla^2 \phi = 4\pi G \rho & (3) \text{ eq.ne di Poisson} \\ p = p(\rho, S) = p(\rho) & (4) \text{ eq.ne di stato} \\ \frac{dS}{dt} = 0 & (5) \text{ condizione di adiabaticità} \end{cases} \quad (8.6)$$

Dove nella (5), equazione per l'evoluzione dell'entropia, abbiamo assunto l'evoluzione adiabatica del sistema che è un'ipotesi abbastanza ragionevole e porta alla scelta di equazioni di stato (3) dipendenti esclusivamente da pressione e densità del fluido. Con questa assunzione possiamo quindi considerare il sistema risolutivo come composto da 4 equazioni in 4 incognite (tecnicamente sarebbero 6 equazioni in 6 incognite perchè la velocità è un vettore e la (2) sono 3 equazioni.).

A questo punto assumiamo di conoscere una soluzione che diciamo “di background” il cui valore è costante:

$$\begin{cases} \rho = \text{cost} = \rho_b \\ p = \text{cost} = p_b \\ \phi = \text{cost} = \phi_b \\ \mathbf{v} = \text{cost} = 0 \end{cases} \quad (8.7)$$

Prima di procedere si fa notare che, per soddisfare l'equazione di Poisson, dovrebbe essere $\rho_b = 0$. Nonostante questa inconsistenza di partenza non avremo problemi, vedremo inoltre che questa incoerenza non sarà presente quando applicheremo il modello ad universi non statici ma in espansione.

Applichiamo ora alla soluzione (8.7) una piccola perturbazione

$$\begin{cases} \rho = \rho_b + \delta\rho = \rho_b(1 + \delta) \\ p = p_b + \delta p \\ \phi = \phi_b + \delta\phi \\ \mathbf{v} = \delta\mathbf{v} \end{cases} \quad (8.8)$$

vogliamo quindi vedere come evolve il sistema con questa aggiunta alle soluzioni. Nelle (8.8) abbiamo preso tutte funzioni di primo grado perchè aver scelto di avere solo piccole perturbazioni fa sì che approssimare al primo ordine è sufficiente: la teoria di Jeans è lineare, per questo motivo più avanti nei conti, trascureremo tutti i termini dal secondo ordine in poi. Vediamo ora come si modificano le (8.6) se vi inseriamo le (8.8).

- **l'equazione di continuità della massa** si riscrive

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_b + \delta\rho) + \nabla \cdot [(\rho_b + \delta\rho)\delta\mathbf{v}] = 0$$

$$\frac{\partial \rho_b}{\partial t} + \frac{\partial \delta\rho_b}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_b \delta\mathbf{v}) + \nabla \cdot (\delta\rho \delta\mathbf{v}) = 0$$

Il primo termine è uguale al membro sinistro dell'equazione di continuità nel caso di background $\frac{\partial \rho_b}{\partial t} + \nabla \cdot 0 \cdot \rho_b = \frac{\partial \rho_b}{\partial t} = 0$. Sviluppiamo il terzo termine:

$$\nabla \cdot (\rho_b \delta\mathbf{v}) = \rho_b \nabla \cdot \delta\mathbf{v} + \delta\mathbf{v} \nabla \cdot \rho_b = \rho_b \nabla \cdot \delta\mathbf{v}$$

,

$\nabla \cdot \rho_b = 0$ perché $\rho_b = \text{cost}$ per ipotesi, (8.7). Il quarto termine è invece di secondo ordine (prodotto tra due quantità infinitesime) e quindi lo trascuriamo poiché abbiamo detto che la teoria deve essere lineare. Alla luce di ciò **l'equazione di continuità per la soluzione perturbata** può essere scritta

$$\frac{\partial \delta\rho}{\partial t} + \rho_b \nabla \cdot \delta\mathbf{v} = 0 \quad (8.9)$$

- **l'equazione di Eulero** (o equazione di conservazione del momento) si riscrive

$$\frac{\partial}{\partial t}(\delta\mathbf{v}) + (\delta\mathbf{v} \cdot \nabla)\delta\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho_b + \delta\rho} \nabla(p_b + \delta p) - \nabla(\phi_b + \delta\phi) \quad (8.10)$$

il secondo termine al primo membro è di secondo ordine quindi lo trascuriamo. Sviluppiamo la quantità

$$\frac{1}{\rho_b + \delta\rho} = \frac{1}{\rho_b(1 + \delta)} = \frac{1}{\rho_b}(1 + \delta)^{-1} \xrightarrow{\text{Taylor}} \frac{1 - \delta}{\rho_b}$$

dove, poiché δ è piccolo, abbiamo potuto espandere con Taylor fermandoci al primo ordine. Riscriviamo quindi la (8.10)

$$\frac{\partial}{\partial t}\delta\mathbf{v} = -\frac{1 - \delta}{\rho_b} \nabla(p_b + \delta p) - \nabla(\phi_b + \delta\phi) = -\frac{\nabla p_b}{\rho_b} + \frac{\delta}{\rho_b} \nabla p_b - \frac{\nabla \delta p}{\rho_b} + \frac{\delta}{\rho_b} \nabla \delta p - \nabla \phi_b + \nabla \delta\phi$$

Dalla soluzione di background abbiamo che

$$-\frac{\nabla p_b}{\rho_b} - \nabla \phi_b = 0$$

Per liberarci da una variabile basti ricordare che abbiamo preso l'entropia costante, questo ci permette di definire la velocità del suono

$$c_s^2 = \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_{S=\text{cost}}$$

da cui

$$\delta p = c_s^2 \delta \rho$$

Quindi, eliminati i termini nulli e quelli di ordine superiore al primo, facendo le opportune sostituzioni, possiamo scrivere l'**equazione di Eulero per la soluzione perturbata** come

$$\frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{c_s^2}{\rho_b} \nabla \delta \rho + \nabla \delta \phi \quad (8.11)$$

- L'**equazione di Poisson** si riscrive

$$\nabla^2(\phi_b + \delta \phi) = 4\pi G(\rho_b + \delta \rho)$$

$$\nabla^2 \phi_b + \nabla^2 \delta \phi = 4\pi G \rho_b + 4\pi G \delta \rho$$

dalla quale eliminiamo i termini che danno la soluzione di background. Quindi l'**equazione di Poisson per la soluzione perturbata** si scrive

$$\nabla^2 \delta \phi = 4\pi G \delta \rho \quad (8.12)$$

Possiamo a questo punto scrivere il sistema risolutivo perturbato

$$\begin{cases} \frac{\partial \delta \rho}{\partial t} + \rho_b \nabla \cdot \delta \mathbf{v} = 0 \\ \frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{c_s^2}{\rho_b} \nabla \delta \rho + \nabla \delta \phi \\ \nabla^2 \delta \phi = 4\pi G \delta \rho \end{cases} \quad (8.13)$$

L'idea di Jeans è quella di cercare delle soluzioni sotto forma di onde piane

$$f(\mathbf{r}, t) = f_k \exp(i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + i \omega t)$$

dove $\mathbf{r}$ è il vettore spaziale, t la coordinata tempo, f_k l'ampiezza, $\mathbf{k} = 2\pi \hat{k}/\lambda$ il vettore d'onda² e ω la frequenza angolare. Passando dallo spazio reale allo spazio delle trasformate di Fourier, le diverse grandezze in gioco diventano

² $\hat{k}$ è il versore d'onda, da la direzione di propagazione dell'onda.

$$\begin{cases} \delta\rho(\mathbf{r}, t) = \delta\rho_k \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + i\omega t) \\ \delta\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \delta\mathbf{v}_k \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + i\omega t) \\ \delta\phi(\mathbf{r}, t) = \delta\phi_k \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + i\omega t) \\ \delta S(\mathbf{r}, t) = \delta S_k \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + i\omega t) \end{cases} \quad (8.14)$$

Questa strada è comoda perché gli operatori differenziali diventano tutte operazioni elementari:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} = i\omega f_k \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + i\omega t) & \text{derivata temporale} \\ \nabla f = i\mathbf{k} f & \text{gradiente di uno scalare} \\ \nabla \cdot \mathbf{f} = i\mathbf{k} \cdot \mathbf{f} & \text{divergenza di uno scalare} \end{cases} \quad (8.15)$$

Sostituiamo quindi le (8.14), (8.14) nel sistema (8.13)³

- equazione di continuità:

$$i\omega\delta\rho + \rho_b i\mathbf{k} \delta\mathbf{v} = i\omega\delta\rho_k \exp(\dots) + i\mathbf{k}\rho_b\delta\mathbf{v}_k \exp(\dots) = \omega\delta\rho_k + \mathbf{k}\rho_b\delta\mathbf{v}_k = 0$$

poiché $\delta := \delta\rho/\rho = \delta_k \exp(\dots)$, abbiamo allora

$$\omega\delta_k + \mathbf{k} \delta\mathbf{v}_k \quad (8.16)$$

- equazione di Eulero:

$$i\omega\delta\mathbf{v}_k \exp(\dots) = -\frac{c_s^2}{\rho_b} i\mathbf{k} \delta\rho_k \exp(\dots) - i\mathbf{k} \delta\phi_k \exp(\dots)$$

$$\omega\delta\mathbf{v}_k = -c_s^2 \mathbf{k} \delta_k - \mathbf{k} \delta\phi_k \quad (8.17)$$

- equazione di Poisson:

$$k^2 \delta\phi_k = -4\pi G \delta_k \rho_b \quad (8.18)$$

Le incognite sono le ampiezze delle onde che mi danno le fluttuazioni delle variabili ρ , v e ϕ . Il sistema è risolvibile, lo riscrivo riordinando i termini

$$\begin{cases} \omega \delta_k + \mathbf{k} \delta\mathbf{v}_k = 0 \\ c_s^2 \mathbf{k} \delta_k + \omega \delta\mathbf{v}_k + \mathbf{k} \delta\phi_k = 0 \\ 4\pi G \rho_b \delta_k + k^2 \delta\phi_k = 0 \end{cases} \quad (8.19)$$

Posso trovarne la soluzione ponendo a zero il determinante della matrice rappresentativa del sistema

$$\det \begin{bmatrix} \omega & \mathbf{k} & 0 \\ c_s^2 \mathbf{k} & \omega & \mathbf{k} \\ 4\pi G \rho_b & 0 & k^2 \end{bmatrix} = 0$$

³Per alleggerire il testo, gli esponenziali in (8.14), che rimangono sempre invariati nelle diverse operazioni, verranno abbreviati in $\exp(\dots)$.

$$\omega^2 k^2 - \mathbf{k} [c_s^2 \mathbf{k} k^2 - 4\pi G \rho_b \mathbf{k}] = 0$$

$$\omega^2 = k^2 c_s^2 - 4\pi G \rho_b \quad (8.20)$$

La (8.20) è detta **relazione di dispersione** e lega la pulsazione delle onde piane alla velocità del suono nel mezzo e al vettore d'onda. Le soluzioni possibili sono di due tipi e dipendono dal segno di ω^2 che discrimina tra valori reali o immaginari. Quindi il valore critico è $\omega^2 = 0$ da cui

$$k^2 c_s^2 - 4\pi G \rho_b = 0$$

e risolvendo per il modulo del vettore d'onda troviamo

$$k_J = k = \pm \frac{\sqrt{4\pi G \rho_b}}{c_s^2} \quad (8.21)$$

la soluzione con il segno positivo è definita **numero d'onda di Jeans**, cioè la scala di Jeans nello spazio di Fourier. Nello spazio reale tale scala è data da

$$\lambda_J = \frac{2\pi}{k_J} = c_s \sqrt{\frac{\pi}{G \rho_b}} \propto \frac{c_s}{\sqrt{G \rho_b}}$$

cioè la stessa forma trovata precedentemente per la scala di Jeans (confrontare con (8.4)), avremo che $\lambda < \lambda_J$ quando $k > k_J$ e viceversa. Abbiamo ritrovato la scala di Jeans in maniera quantitativa.

Riprendiamo ora la relazione di dispersione (8.20) e riaggiustiamone i termini

$$\omega^2 = k^2 c_s^2 \left(1 - \frac{4\pi G \rho_b}{k^2 c_s^2} \right) = k^2 c_s^2 \left(1 - \frac{4\pi^2}{k^2 \lambda_J^2} \right)$$

sostituiamo $\lambda = 2\pi/k$

$$\omega^2 = k^2 c_s^2 \left[1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_J} \right)^2 \right] \quad (8.22)$$

avremo quindi un comportamento diverso delle soluzioni a seconda che la scala sia più grande o più piccola della scala di Jeans:

- per $\lambda < \lambda_J \Rightarrow \omega^2 > 0$ abbiamo pulsazione reale:

$$\omega = \mp k c_s \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_J} \right)^2}$$

e sostituendo nelle soluzioni d'onda (8.14) avremo che la parte relativa al tempo resta immaginaria, quindi tali soluzioni rimangono onde piane progressive, con parte spaziale invariata e parte temporale caratterizzata da una velocità di fase

$$v_s = \pm c_s \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_J} \right)^2}$$

Abbiamo due onde che si propagano in direzione opposta per i due segni della velocità di fase. I comportamenti asintotici:

- per $\lambda \rightarrow -\infty$ le onde si propagano esattamente alla velocità del suono nel fluido, $\omega = \pm k v_s$;
- per $\lambda \rightarrow \lambda_J$ l'onda è statica, non si propaga e abbiamo onde stazionarie, $\omega = 0$.
- per $\lambda > \lambda_J \Rightarrow \omega^2 < 0$ riscriviamo ω^2 come

$$\omega^2 = -4\pi G \rho_b \left(1 - \frac{k^2 c_s^2}{4\pi G \rho_b} \right) = -4\pi G \rho_b \left[1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_J} \right)^2 \right]$$

,

abbiamo quindi due soluzioni immaginarie

$$\omega = \mp i \sqrt{4\pi G \rho_b \left[1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_J} \right)^2 \right]}$$

sostituendo nelle (8.14), avremo nella parte dipendente dal tempo il fattore $i^2 = -1$ e quindi la parte temporale non sarà più immaginaria andando a modificare l'ampiezza temporale. Per quanto riguarda la parte spaziale questa rimane immutata. Abbiamo quindi come soluzione delle onde stazionarie con ampiezza crescente con il tempo. Le due soluzioni per le perturbazioni di densità sono quindi

$$\delta(\mathbf{r}, t) = \delta_k \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \exp(\mp |\omega| t) \quad (8.23)$$

Quando viene superata la scala di Jeans l'ampiezza dell'onda può avere o una crescita o una decrescita esponenziale. Il tempo scala in cui evolve l'ampiezza dell'onda è dato da

$$\tau := |\omega|^{-1} = \sqrt{|\omega^{-2}|} = (4\pi G \rho_b)^{-1/2} \left[1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_J} \right)^2 \right]^{-1/2}$$

Tali soluzioni rappresentano esattamente il fenomeno dell'**instabilità gravitazionale di Jeans**. Asintoticamente abbiamo

- per $\lambda \rightarrow \infty$ il tempo scala coincide esattamente con il tempo di free-fall, $\tau_{ff} \propto 1/\sqrt{G\rho}$;
- per $\lambda \rightarrow \lambda_J$ abbiamo che $\omega \rightarrow 0$ e quindi il tempo di evoluzione delle ampiezze diventa infinito e si ritrova la soluzione di onda stazionaria.

Abbiamo quindi trovato che quando una perturbazione può crescere lo fa in maniera esponenziale. Importante ricordare comunque che tutto il costruito teorico funziona fintanto che $\delta \ll 1$.

8.2 Teoria di Jeans in Cosmologia

La teoria di Jeans come l'abbiamo studiata fin qui non tiene conto dell'espansione dell'Universo. Quando affrontiamo problemi cosmologici dobbiamo ricordarci che abbiamo a che fare con scale e tempi fondamentali a cui dobbiamo rapportarci. Nello studio del collasso delle strutture dobbiamo considerare tre scale fondamentali,

- **Raggio dell'orizzonte**, λ_H o R_H : è la scala al di sotto della quale c'è connessione causale. Si definisce come

$$R_H(t) = a(t) \int_0^t \frac{c dt'}{a(t')}$$

Su scale più grandi di questa l'unica delle interazioni fondamentali ad essere rilevante è la gravità, al di sotto invece vanno considerate anche le altre interazioni che competono con la gravità.

- **Scala di Jeans**, λ_J : perturbazioni di scala maggiore della scala di Jeans crescono o decrescono esponenzialmente, al di sotto di questa scala si propagano come onde piane. Intorno alla scala di Jeans la micro-fisica bilancia gli effetti macroscopici della gravità.
- **Scala di dissipazione**, λ_d : al di sopra di questa scala le perturbazioni si dissipano per effetto della propagazione delle onde che le trasportano (questo processo avviene separatamente per la materia ordinaria e quella oscura).

Avremo inoltre a che fare con due tempi fondamentali,

- **tempo dell'equivalenza**, t_{eq} : trascorso questo momento dell'evoluzione dell'Universo la materia prevale sulla radiazione, la pressione di radiazione non è più in grado di contrastare il collasso gravitazionale;
- **tempo del disaccoppiamento**, t_{dec} : trascorso questo momento la materia barionica è disaccoppiata dalla radiazione, il numero degli scattering diventa irrilevante e il libero cammino medio dei fotoni praticamente infinito.

Per avere una trattazione completa della teoria di Jeans dovremmo applicare argomenti di relatività generale, ma in realtà buona parte dei fenomeni avviene in regime prettamente Newtoniano. La relatività generale entra in gioco principalmente su scale molto più grandi della scala di Jeans e di questo problema daremo qui solo una trattazione qualitativa.

8.2.1 Soluzione per $\lambda > \lambda_H$

Vedremo ora una soluzione un problema, che andrebbe trattato con argomenti di relatività generale, trattata in maniera qualitativa per avere un'idea degli andamenti. Su scale $\lambda > \lambda_H$ o comunque scale $\lambda_J \ll \lambda < \lambda_H$, l'unica interazione ad essere importante è quella relativa al campo gravitazionale, saremmo costretti ad applicare argomenti di relatività generale alla trattazione.

Consideriamo le perturbazioni come un piccolo universo che prendiamo sferico, $\Omega > 1$ e sovradenso rispetto ad un universo in cui è immerso più grande e piatto, che per semplificare la trattazione prenderemo di tipo EdS, chiamare questo secondo universo background. Ragionare in termini di "universi" ci aiuta perché ci consente di usare le Equazioni di Friedmann, in particolare la seconda, nella forma

$$H^2 + \frac{Kc^2}{a^2} = \frac{8\pi}{3}G\rho$$

Allora avremo per l'universo di background $\Omega = 1$ e $K = 0$, da cui

$$H_b^2 = \frac{8\pi}{3} G \rho_b \quad (8.24)$$

e per l'universo sovradenso chiuso $\Omega > 1$ e $K = +1$, da cui

$$H_{cl}^2 + \frac{c^2}{a^2} = \frac{8\pi}{3} G \rho_{cl} \quad (8.25)$$

Sincronizziamo le due equazioni al tempo in cui hanno lo stesso valore del parametro di Hubble (del resto $H = H(t)$)

$$H_b = H_{cl} \Rightarrow \frac{8\pi}{3} G \rho_b = \frac{8\pi}{3} G \rho_{cl} - \frac{c^2}{a^2}$$

$$\frac{8\pi}{3} G (\rho_{cl} - \rho_b) = \frac{c^2}{a^2}$$

Poiché però $\delta = \frac{\delta\rho}{\rho} = \frac{\rho_{cl} - \rho_b}{\rho_b}$, avremo allora

$$\delta(t) = \frac{3c^2}{8\pi G a^2} \frac{1}{\rho_b} \propto a^{-2} \rho_b^{-1} \quad (8.26)$$

dove la dipendenza dal tempo è in $a\rho_b$. Grazie alle soluzioni delle Equazioni di Friedmann per universi EdS trovate in Sezione 2.2 dalla (8.26) possiamo vedere che

- quando $t < t_{eq}$ domina la radiazione quindi $w = 1/3$, $a \propto t^{1/2}$ e $\rho \propto a^{-4}$, da cui quindi $\delta_R \propto a^2$;
- quando $t > t_{eq}$ domina la materia quindi $w = 0$, $a \propto t^{2/3}$ e $\rho \propto a^{-3}$, da cui quindi $\delta_R \propto a$.

Questo nel caso in cui $\lambda_J \ll \lambda < \lambda_H$, ma se ci mettiamo su scale $\lambda > \lambda_H$ è solo la gravità che agisce e quindi avremo

$$\delta_{DM} \propto \delta_b \propto \delta_r \propto a^2 \propto t$$

quando $t < t_{eq}$,

$$\delta_{DM} \propto \delta_b \propto \delta_r \propto a \propto t^{2/3}$$

quando $t > t_{eq}$. Le perturbazioni oltre l'orizzonte seguono il comportamento della componente dominante, poiché tutte le componenti si possono dire accoppiate dal fatto che l'unica interazione che sentono è quella gravitazionale. Perciò fuori dall'orizzonte le perturbazioni crescono sempre. All'interno dell'orizzonte, ma lontani dalla scala di Jeans, le componenti sono tutte disaccoppiate quindi, nonostante il risultato sia comunque valido, ognuna segue un andamento differente. Tale andamento andrebbe calcolato, quelli che abbiamo calcolato noi sono solo gli andamenti della componente dominante, radiazione prima dell'equivalenza e materia dopo. Poiché inoltre il raggio dell'orizzonte cambia nel tempo, ci saranno scale che in una certa epoca sono più grandi di λ_H e in un epoca successiva non lo sono più.

8.2.2 Soluzione per $\lambda < \lambda_H$

Abbiamo iniziato a vedere le soluzioni della crescita delle perturbazioni in un Universo in espansione, dopo aver affrontato il problema per Universo statico. Nel caso statico le perturbazioni crescono semplicemente quando la scala supera la scala di Jeans, quando sono inferiori di questa scala si propagano come onde sonore. In particolare abbiamo visto il comportamento generale delle perturbazioni fuori dall'orizzonte, servendoci delle Equazioni di Friedmann per arrivare alla soluzione. Studieremo ora l'evoluzione all'interno dell'orizzonte cosmologico in un Universo in espansione, $\lambda < \lambda_J$.

Per quanto riguarda la notazione, indicheremo con r le coordinate fisiche e con x quelle comoventi, con legge di conversione $r = a(t)x$. La velocità in coordinate fisiche è legata a quella in coordinate comoventi dalla

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \dot{a}x + \dot{x}a = \frac{\dot{a}}{a}ax + a\dot{x} = Hr + a\dot{x}$$

$$\dot{\mathbf{r}} := H(t)\mathbf{r} + \mathbf{v} \quad (8.27)$$

dove Hr è la legge di Hubble. Abbiamo inoltre definito

$$v := a\dot{x}$$

la **velocità peculiare** che indica le perturbazioni del campo di velocità rispetto al flusso di Hubble, è quindi una misura della componente di velocità di un oggetto rispetto a quella generale dovuta all'espansione dell'Universo. La velocità peculiare è quindi una disomogeneità del campo di velocità complessivo, generata da un campo gravitazionale che agisce sulla materia. È la velocità a due componenti definita nella (8.27) ad entrare nelle equazioni della fluidodinamica viste in precedenza. Riscriviamo quindi le (8.6) nel sistema di riferimento proprio (coordinate fisiche)

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_{\mathbf{r}} + \nabla_{\mathbf{r}} \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \\ \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}\right)_{\mathbf{r}} + (\mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{r}})\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla_{\mathbf{r}}p - \nabla_{\mathbf{r}}\phi \\ \nabla_{\mathbf{r}}^2\phi = 4\pi G\rho \end{cases} \quad (8.28)$$

Abbiamo detto quindi che consideriamo $\lambda < \lambda_J$ e cerchiamo soluzioni per universi di materia. Anche in questo caso utilizziamo l'approccio di perturbare una soluzione nota:

$$\begin{cases} \rho = \rho_b \rightarrow \rho = \rho_b + \delta\rho = \rho_b(1 + \delta) \\ \mathbf{u} = H\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{u} = H\mathbf{r} + \mathbf{v} \\ \phi = \phi_b \rightarrow \phi = \phi_b + \delta\phi \\ p = p_b \rightarrow p = p_b + \delta p \end{cases} \quad (8.29)$$

In questo caso le soluzioni sono **consistenti**, al contrario di quelle per universi statici. In ragione delle (8.29), riscriviamo le (8.28):

- **equazione di continuità:**

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_b + \delta\rho) + \nabla \cdot [(\rho_b + \delta\rho)(H\mathbf{r} + \mathbf{v})] = 0$$

$$\frac{\partial \rho_b}{\partial t} + \frac{\partial \delta\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_b H\mathbf{r}) + \nabla \cdot (\rho_b \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\delta\rho H\mathbf{r}) + \nabla \cdot \delta\rho \mathbf{v} = 0$$

eliminiamo i termini di secondo ordine e quelli che danno la soluzione imperturbata

$$\frac{\partial \delta \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_b \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\delta \rho H \mathbf{r}) = 0$$

Operiamo ora sui diversi termini:

$$\nabla \cdot (\rho_b \mathbf{v}) = \rho_b \nabla \cdot \mathbf{v}$$

per il principio di omogeneità;

$$\nabla \cdot (\delta \rho H \mathbf{r}) = H \mathbf{r} \nabla \delta \rho + \delta \rho \nabla \cdot (H \mathbf{r}) = H \mathbf{r} \nabla \delta \rho + \delta \rho H \nabla \cdot \mathbf{r} = H \mathbf{r} \nabla \delta \rho + \delta \rho 3H$$

poichè $H = H(t) \propto \mathbf{r}$ e $\nabla \cdot \mathbf{r} = 3$. Possiamo allora riscrivere l'equazione di continuità

$$\frac{\partial \delta \rho}{\partial t} + \rho_b \nabla \cdot \mathbf{v} + H \mathbf{r} \nabla \delta \rho + 3H \delta \rho = 0 \quad (8.30)$$

- **equazione di Eulero**

$$\frac{\partial (H \mathbf{r} + \mathbf{v})}{\partial t} + [(H \mathbf{r} + \mathbf{v}) \cdot \nabla] H \mathbf{r} + \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho_b + \delta \rho} \nabla (p_b + \delta p) - \nabla (\phi_b + \delta \phi)$$

sviluppiamo ricordando che $\frac{1}{\rho_b + \delta \rho} = \frac{1}{\rho_b(1+\delta)} = \frac{1-\delta}{\rho_b}$,

$$\begin{aligned} & \underbrace{\frac{\partial (H \mathbf{r})}{\partial t}}_{imp.} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \underbrace{H \mathbf{r} \cdot \nabla (H \mathbf{r})}_{imp.} + \underbrace{\mathbf{v} \cdot \nabla (H \mathbf{r})}_{=H \mathbf{v}} + H \mathbf{r} \cdot \nabla \mathbf{v} + \underbrace{\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}}_{2^o ord.} = \\ & = \underbrace{\frac{\nabla p_b}{\rho_b}}_{imp.} + \underbrace{\frac{\delta}{\rho_b} \nabla p_b - \frac{1}{\rho_b} \nabla \delta p}_{\rho_b \nabla \mathbf{r} \Rightarrow 0} + \underbrace{\frac{\delta}{\rho_b} \nabla \delta p}_{2^o ord.} + \underbrace{-\nabla \phi_b}_{imp.} - \nabla \delta \phi \end{aligned}$$

dove i termini *imp.* sono quelli della soluzione imperturbata, semplificando l'equazione diventa quindi

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + H \mathbf{v} + H \mathbf{r} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho_b} \nabla \delta p - \nabla \delta \phi \quad (8.31)$$

- **equazione di Poisson**

$$\nabla^2 (\phi_b + \delta \phi) = 4\pi G (\rho_b + \delta \rho)$$

$$\nabla^2 \delta \phi = 4\pi G \delta \rho \quad (8.32)$$

La (8.30), le (8.31) e la (8.32) sono le equazioni della fluidodinamica che legano le perturbazioni nello spazio fisico: alcuni termini sono legati esclusivamente all'espansione dell'Universo, perciò non sono presenti in coordinate comoventi.

Passiamo quindi in coordinate comoventi, ricordando che

$$\mathbf{r} = a\mathbf{x}$$

$$\nabla_{\mathbf{r}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} = \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} = \frac{1}{a} \nabla_{\mathbf{x}}$$

Per la derivata totale vale invece, nello spazio proprio

$$\frac{Df(\mathbf{r}, t)}{Dt} = \left(\frac{\partial f(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right)_{\mathbf{r}} + \frac{\partial f(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = \left(\frac{\partial f(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right)_{\mathbf{r}} + H\mathbf{r} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f(\mathbf{r}, t)$$

dove $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = H\mathbf{r}$ è la legge di Hubble. Nello spazio comovente invece

$$\frac{Df(\mathbf{x}, t)}{Dt} = \left(\frac{\partial f(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \right)_{\mathbf{x}} + \frac{\partial f(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = \left(\frac{\partial f(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \right)_{\mathbf{x}}$$

poiché infatti $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = H\mathbf{x}$ ma in uno spazio comovente per definizione $\mathbf{x}$ non varia con t e quindi si pone $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = 0$, da cui quindi la conversione di coordinate proprie-comoventi si scrive

$$\left(\frac{\partial f(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right)_{\mathbf{r}} + H\mathbf{r} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f(\mathbf{r}, t) = \left(\frac{\partial f(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \right)_{\mathbf{x}}$$

Riscriviamo quindi le equazioni della fluidodinamica in coordinate comoventi:

- **equazione di Continuità**

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \delta \rho}{\partial t} \right)_{\mathbf{x}} - H\mathbf{r} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \delta \rho + \frac{\rho_b}{a} \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v} + 3H\delta \rho + H\mathbf{r} \nabla_{\mathbf{r}} \delta \rho &= 0 \\ \left(\frac{\partial \delta \rho}{\partial t} \right)_{\mathbf{x}} + \frac{\rho_b}{a} \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v} + 3H\delta \rho &= 0 \end{aligned} \quad (8.33)$$

- **equazione di Eulero**

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right)_{\mathbf{x}} - H\mathbf{r} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \mathbf{v} + H\mathbf{v} + H\mathbf{r} \nabla_{\mathbf{r}} \mathbf{v} &= -\frac{1}{a\rho_b} \nabla_{\mathbf{x}} \delta p - \frac{1}{a} \nabla_{\mathbf{x}} \delta \phi \\ \text{ricordando che } c_s^2 = \frac{\delta p}{\delta \rho} \Big|_{S=\text{cost}} \text{ da cui } \delta p &= \delta \rho c_s^2 \text{ e che } \frac{\delta \rho}{\rho_b} = \delta \\ \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right)_{\mathbf{x}} + H\mathbf{v} &= -\frac{c_s^2}{a} \nabla_{\mathbf{x}} \delta - \frac{1}{a} \nabla_{\mathbf{x}} \delta \phi \end{aligned} \quad (8.34)$$

- **equazione di Poisson**

$$\frac{1}{a^2} \nabla_{\mathbf{x}}^2 = 4\pi G \delta \rho \quad (8.35)$$

Con le (8.33), (8.34) e (8.35) siamo in grado di sviluppare la **teoria di Jeans per universi in espansione** comodamente.

Facendo quindi il punto della situazione, abbiamo imposto la condizione di adiabaticità, abbiamo assunto una soluzione di background nota e vi abbiamo aggiunto delle piccole perturbazioni. Abbiamo infine trovato il sistema risolvibile in coordinate comoventi:

$$\begin{cases} \frac{\partial \delta \rho}{\partial t} + \frac{\rho_b}{a} \nabla \mathbf{v} + 3H \delta \rho = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + H \mathbf{v} = -\frac{c_s^2}{a} \nabla \delta - \frac{1}{a} \nabla \delta \phi \\ \frac{1}{a^2} \nabla^2 = 4\pi G \delta \rho \end{cases} \quad (8.36)$$

Cerchiamo quindi soluzioni in forma di onde del tipo

$$f(\mathbf{x}, t) = f_k(t) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})$$

contrariamente a quanto fatto per l'Universo statico, in cui avevamo l'ampiezza costante per un esponenziale dipendente dal tempo e poteva quindi ammettere soluzioni stazionarie, in questo caso l'ampiezza delle onde dipende essa stessa dal tempo, $f_k(t)$, per effetto dell'espansione dell'Universo. Cerchiamo quindi come evolvono delle perturbazioni nel tempo in un Universo di Friedmann in espansione, le soluzioni del sistema sono sotto forma di onde piane con parte spaziale e temporale separate. Per una generica funzione $f(\mathbf{x}, t)$, quindi,

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \dot{f}_k(t) \exp(\dots)$$

$$\nabla \cdot f(\mathbf{x}, t) = i\mathbf{k} f_k(t) \exp(\dots) = i\mathbf{k} f(\mathbf{x}, t)$$

Vogliamo quindi trovare la soluzione del sistema (??), applichiamo allora quanto detto e sostituiamo all'interno delle 3 equazioni le variabili sotto forma di onde⁴:

- **equazione di continuità**

$$\delta \dot{\rho}_k + \frac{\rho_b}{a} i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_k + 3H \delta \rho_k = 0$$

$$\delta \dot{\rho}_k + i \frac{\rho}{a} \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_k + 3H \delta \rho_k = 0$$

tenendo conto che stiamo considerando un Universo di materia $\rho_b \propto a^{-3}$ e che valgono le seguenti

$$\delta \dot{\rho}_k = (\dot{\rho}_b \delta) = \dot{\rho}_b \delta_k + \dot{\delta}_k \rho_b$$

$$\frac{\dot{\rho}_b}{\rho_b} = -3 \frac{\dot{a}}{a}$$

$$\delta \dot{\rho}_k = -3 \frac{\dot{a}}{a} \rho_b \delta_k + \rho_b \dot{\delta}_k$$

sostituendo nell'equazione sopra abbiamo

⁴poiché ogni termine in ogni equazione moltiplica per un esponenziale $\exp(\dots)$, e poiché questi si semplificherebbero tutti, omettiamo di scriverli.

$$\begin{aligned}
-3\frac{\dot{a}}{a}\rho_b\delta_k + \rho_b\dot{\delta}_k + i\frac{\rho}{a}\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_k + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho\delta_k &= 0 \\
\dot{\delta}_k + i\mathbf{k}\frac{\mathbf{v}_k}{a} &= 0
\end{aligned} \tag{8.37}$$

• equazione di Eulero

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{v}}_k + H\mathbf{v}_k &= -\frac{c_s^2}{a}i\mathbf{k}\delta_k - \frac{1}{a}i\mathbf{k}\delta\phi_k \\
\dot{\mathbf{v}}_k + \frac{\dot{a}}{a}\mathbf{v}_k &= \frac{i\mathbf{k}}{a}(c_s^2\delta_k + \delta\phi_k)
\end{aligned} \tag{8.38}$$

• equazione di Poisson

$$\begin{aligned}
-\frac{k^2}{a^2}\delta\phi_k &= 4\pi G\rho_b\delta_k \\
\delta\phi_k &= -\frac{4\pi G\rho_b\delta_k a^2}{k^2}
\end{aligned} \tag{8.39}$$

Quelle appena ottenute sono le equazioni fondamentali della fluidodinamica nello spazio di Fourier per perturbazioni in Universi in espansione su scale minori della scala dell'orizzonte.

Prima di risolvere il sistema composto dalle (8.37)-(8.39) facciamo delle considerazioni sulla velocità, dopo l'epoca dell'equivalenza. Scomponiamo il vettore $\mathbf{v}_k$ nelle due parti perpendicolare e parallela al vettore d'onda $\mathbf{k}$:

$$\underbrace{\mathbf{v}_k}_{3D} = \underbrace{\mathbf{v}_{k,\perp}}_{2D} + \underbrace{v_{k,\parallel}}_{1D}$$

Procedere così risulta utile perché

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_\perp = \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_\perp = 0$$

la componente perpendicolare ha divergenza nulla e

$$\nabla \times v_{k,\parallel} = \mathbf{k} \cdot v_{k,\parallel} = |\mathbf{k}| |v_{k,\parallel}| = 0$$

la componente parallela ha rotore nullo. Questa considerazione ci permette di semplificare l'equazione di Eulero che può essere infatti scomposta nelle due componenti. Poiché δ_k e $\delta\phi_k$ sono parallele a $\mathbf{k}$, la componente perpendicolare dell'equazione di Eulero è

$$\dot{\mathbf{v}}_\perp + \frac{\dot{a}}{a}\mathbf{v}_\perp = 0 \Rightarrow \frac{\dot{\mathbf{v}}_\perp}{\mathbf{v}_\perp} = -\frac{\dot{a}}{a}$$

e quindi

$$\mathbf{v}_\perp \propto a^{-1}$$

Ciò significa che la parte rotazionale del campo di velocità (componente verticale del campo di velocità iniziale) è disaccoppiata dalla densità e dal potenziale, quindi **deca-de velocemente** con l'espansione dell'Universo scomparendo in fretta, può quindi essere trascurata.

Considereremo allora solo la parte parallela al vettore $\mathbf{k}$ dell'equazione di Eulero, riscriviamo quindi le (8.37)-(8.39):

$$\begin{cases} \dot{d}v_k + \frac{ikv_{k,\parallel}}{a} = 0 \\ \dot{v}_{k,\parallel} + \frac{\dot{a}}{a}v_{k,\parallel} = -\frac{ik}{a}(c_s^2\delta_k + \delta\phi_k) \\ k^2\delta\phi_k = -4\pi Ga^2\rho_b\delta_k \end{cases} \quad (8.40)$$

Vogliamo risolvere il sistema per trovare l'evoluzione della densità che ci consentirà di capire come crescono le strutture⁵, quindi risolviamo per la densità in funzione di δ_k eliminando la componente parallela della velocità e l'ampiezza del potenziale. Come prima cosa deriviamo l'equazione di continuità in (8.40) rispetto al tempo:

$$\ddot{\delta}_k + \frac{ik}{a}\dot{v}_{k,\parallel} - \frac{ik\dot{v}_{k,\parallel}}{a^2}\dot{a} = 0$$

e vi sostituisco $\dot{v}_{k,\parallel}$ ricavandola dall'equazione di Eulero:

$$\ddot{\delta}_k + \frac{ik}{a}\left(-Hv_{k,\parallel} - ik\frac{c_s^2}{a}\delta_k - \frac{ik}{a}\delta\phi_k\right) - \frac{ik\dot{v}_{k,\parallel}}{a^2}\dot{a} = 0$$

dall'equazione di continuità possiamo rimuovere la velocità parallela dall'equazione poiché $v_{k,\parallel} = -\frac{a\dot{\delta}_k}{ik} = \frac{ai\dot{\delta}_k}{k}$ e l'ampiezza del potenziale che è $\delta\phi_k = -\frac{4\pi Ga^2\rho_b\delta_k}{k^2}$, diventa quindi

$$\begin{aligned} \ddot{\delta}_k + \frac{k^2}{a^2}c_s^2\delta_k - \frac{k^2}{a^2}\frac{4\pi Ga^2\rho_b\delta_k}{k^2} - \frac{\dot{a}}{a}\frac{ik}{a}\frac{ia\dot{\delta}_k}{k} - i\frac{\dot{a}}{a^2}\frac{kia\dot{\delta}_k}{k} &= 0 \\ \ddot{\delta}_k + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta}_k + \left(\frac{k^2c_s^2}{a^2} - 4\pi G\rho_b\right)\delta_k &= 0 \end{aligned} \quad (8.41)$$

La (8.41) è un'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine e mi dice come evolve il campo di densità nel tempo all'interno di un Universo in espansione. Posso riscriverla in coordinate fisiche (proprie) per ottenere l'importantissima equazione risolutiva (**relazione di dispersione**) del nostro problema:

$$\ddot{\delta}_k + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta}_k + (k^2c_s^2 - 4\pi G\rho_b)\delta_k = 0 \quad (8.42)$$

dove $2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta}_k = 2H(t)\dot{\delta}_k$ è il termine che tiene conto dell'espansione dell'Universo e dipende dal modello cosmologico attraverso il parametro di Hubble, $k^2c_s^2\delta_k$ è invece il termine che tiene conto del campo di velocità caratteristico del fluido in esame.

8.3 Teoria di Jeans in Universi EdS

L'equazione (8.42) ci permette di ottenere la crescita delle perturbazioni in diversi possibili modelli cosmologici. Risolviamo ora per il modello EdS, ovvero per un Universo monocomponente piatto di polvere, quindi con $w = 0$ e $\Omega_{0,m} = 1$. Sappiamo infatti che per buona

⁵A tal fine è ovviamente importante anche capire come evolve il potenziale ma, per noi, è più importante ora conoscere l'evoluzione della densità.

parte della storia evolutiva questa è una buona assunzione in quanto abbiamo visto che solo in tempi recenti l'Universo si accorge del contributo della costante cosmologica o di una eventuale curvatura. Tutta la teoria che stiamo sviluppando, inoltre, è lineare, cioè si basa sull'assunzione che le perturbazioni al campo di densità sono piccole. Questo evidentemente non è più vero a redshift bassi, dove misuriamo fluttuazioni dell'ordine di $\delta \approx 10^2$ ma, dalle misure sulle anisotropie della CMB, sappiamo che era vero nell'Universo primordiale, dove appunto il modello EdS è un'ottima approssimazione.

Risolveremo la (8.42) sotto le seguenti condizioni:

- $\lambda < \lambda_H$, all'interno dell'orizzonte dove dobbiamo tenere conto delle interazioni non gravitazionali della materia ma non abbiamo problemi di relatività generale;
- $t > t_{eq}$, quando la componente dominante è la materia il collasso diventa possibile;
- l'Universo è piatto, come già detto vogliamo poter porre $\Omega_0 = \Omega_{0,m} = 1$.

Nella Sezione 2.2 abbiamo trovato la soluzione delle Equazioni di Friedmann nel caso di Universo piatto di polvere (riassunto delle dipendenze trovate in Tabella 2.1), prendiamo quindi

$$\rho_b = \frac{1}{6\pi G} t^{-2}$$

$$H(t) = \frac{2}{3} t^{-1}$$

e sostituiamo nella (8.42)

$$\begin{aligned} \ddot{\delta}_k + \frac{4}{3} \frac{\dot{\delta}_k}{t} + \delta_k \left(k^2 c_s^2 - \frac{4\pi G}{6\pi G} t^{-2} \right) &= 0 \\ \ddot{\delta}_k + \frac{4}{3} \frac{\dot{\delta}_k}{t} + \delta_k \left(k^2 c_s^2 - \frac{2}{3} t^{-2} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (8.43)$$

questa è l'equazione che dobbiamo risolvere. Cerchiamo soluzioni in forma di legge di potenza

$$\delta_k \propto t^\alpha$$

$$\dot{\delta}_k \propto \alpha t^{\alpha-1} = \frac{\alpha}{t} \delta_k$$

$$\ddot{\delta}_k \propto \alpha(\alpha-1) t^{\alpha-2} = \frac{\alpha(\alpha-1)}{t^2} \delta_k$$

e sostituiamo nella (8.43)

$$\frac{\alpha(\alpha-1)}{t^2} \delta_k + \frac{4}{3} \frac{\alpha}{t^2} \delta_k + \frac{1}{t^2} \delta_k \left(k^2 c_s^2 t^2 - \frac{2}{3} \right) = 0$$

$$\alpha(\alpha-1) + \frac{4}{3} \alpha + \left(k^2 c_s^2 t^2 - \frac{2}{3} \right) = 0$$

$$\alpha^2 - \alpha + \frac{4}{3}\alpha + \frac{k^2 c_s^2}{6\pi G \rho_b} - \frac{2}{3} = 0$$

dalla quale trovo la **relazione di dispersione** per il caso EdS:

$$3\alpha^2 + \alpha + \frac{k^2 c_s^2}{2\pi G \rho_b} - 2 = 0 \quad (8.44)$$

che è un'equazione di secondo grado in α e pertanto ammette due soluzioni. Di che tipo siano tali soluzioni dipende dal discriminante⁶. Poniamolo quindi $\Delta = 0$, che succede?

$$1 - 12 \left(\frac{k^2 c_s^2}{2\pi G \rho_b} - 2 \right) = 0$$

L'unica variabile è k che discrimina tra soluzioni reali ed immaginarie

$$k_J := \frac{5}{c_s} \sqrt{\frac{\pi G \rho_b}{6}}$$

questa è la scala di Jeans nello spazio di Fourier che posso riportare nello spazio reale trovando

$$\lambda_J := \frac{2\pi}{k_J} = \frac{c_s}{5} \sqrt{\frac{24\pi}{G \rho_b}} \quad (8.45)$$

abbiamo quindi trovato la **scala di Jeans EdS**, che determina come evolvono le perturbazioni in un Universo di materia. Le soluzioni dell'equazione (8.44) sono

$$\alpha_{1,2} = \frac{-1 \pm 5\sqrt{1 - (\lambda_J/\lambda)^2}}{6}$$

Da cui le perturbazioni non evolveranno esattamente come una legge di potenza poiché nel loro esponente compare la scala λ , le soluzioni saranno quindi date da $\delta_k \propto t^\alpha$:

- per $\lambda < \lambda_J$ il discriminante è negativo, abbiamo quindi due soluzioni α_1, α_2 immaginarie:

$$\delta_{k,\pm} = t^{i\alpha_{1,2}}$$

sostituiamo quindi nella forma d'onda delle fluttuazioni di densità

$$\delta_\pm(\mathbf{x}, t) = \delta_{k,\pm} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})$$

troveremmo che, quando la scala è inferiore alla scala di Jeans, le perturbazioni si propagano rimanendo delle onde;

- per $\lambda > \lambda_J$ il discriminante è positivo, abbiamo quindi due soluzioni α_1, α_2 reali:

$$\delta_{k,\pm} = t^{\alpha_{1,2}}$$

sostituendo nella forma d'onda troviamo

⁶Io lo scrivo ma spero di non doverlo guardare mai: $\Delta = b^2 - 4ac$

$$\delta_{\pm}(\mathbf{x}, t) = t^{\frac{-1 \pm 5\sqrt{1 - (\lambda_J/\lambda)^2}}{6}} \exp(i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \quad (8.46)$$

nel caso in cui $\lambda \gg \lambda_J$, poiché abbiamo che $t \propto a^{3/2}$, le due soluzioni saranno

$$\delta_{-}(\mathbf{x}, t) \propto t^{-1} \propto a^{-3/2}$$

$$\delta_{+}(\mathbf{x}, t) \propto t^{2/3} \propto a$$

Ci sono quindi due diversi comportamenti, una possibile soluzione decrescente $\delta_{-}(\mathbf{x}, t)$ che si attenua come $t^{-1} \propto a^{-3/2}$ e una soluzione, cosmologicamente rilevante, crescente $\delta_{+}(\mathbf{x}, t)$ che va come $t^{2/3} \propto a$.

Abbiamo quindi trovato che nel caso di Universo EdS, quando le perturbazioni possono crescere, lo fanno andando esattamente come il fattore di espansione dell'Universo. Inoltre, confrontando con il risultato ottenuto per un Universo statico, in cui le perturbazioni crescono esponenzialmente, quando viene considerata l'espansione dell'Universo la crescita va come una legge di potenza, e quindi è più lenta. Questo ovviamente non ci stupisce in quanto ci attendiamo che l'espansione dell'Universo abbia un feedback negativo sulla formazione delle strutture.

La soluzione così trovata è valida in linea di principio per ogni tipo di materia. Il problema è che materia oscura e barionica non sono disaccoppiate ma interagiscono gravitazionalmente. La materia oscura abbiamo visto che si disaccoppia prima dalla radiazione rispetto a quella barionica, quindi dal momento del suo disaccoppiamento le perturbazioni evolveranno con l'andamento visto ora.

Quando anche la materia barionica si disaccoppia dalla radiazione, le perturbazioni nel campo di densità della materia oscura hanno già avuto il tempo di crescere. L'effetto risultante è che le perturbazioni del campo di densità della materia barionica non evolvono liberamente ma seguono le buche di potenziale degli aloni di materia oscura già formati. La crescita delle sovradensità della materia barionica sarà più rapida di $\delta_{+} \propto a$.

8.4 Teoria di Jeans in Universi Curvi di Materia

Ci chiediamo ora come evolvono le fluttuazioni di densità in un Universo che non sia necessariamente piatto. Le nostre ipotesi di partenza sono

- siano presenti fluttuazioni nel campo di densità della materia;
- ci troviamo dopo l'equivalenza, $t > t_{eq}$;
- siamo in un Universo di materia, $w = 0$;
- la scala sia $\lambda_J \ll \lambda < \lambda_H$, molto più grande della scala di Jeans ma entro l'orizzonte⁷ in modo che conti solo la gravità;
- l'Universo sia curvo $\Omega_0 \neq 1$.

⁷Anche se vedremo che le soluzioni saranno valide anche per $\lambda > \lambda_H$

Poiché la gravità deve vincere sull'espansione dell'Universo e poiché i diversi modelli cosmologici prevedono un tasso di espansione differente, ci attendiamo che la crescita delle perturbazioni sia tanto più difficile quanto più efficiente è il tasso di espansione e viceversa. Ciò significa che la crescita delle perturbazioni tiene traccia del modello cosmologico assunto, troveremo che $\delta \propto H$.

In questa trattazione facciamo uso di modelli di Friedmann e quindi in qualche modo tiene conto anche della relatività generale. Partiamo trovando la derivata temporale del parametro di Hubble:

$$H = \frac{\dot{a}}{a} \Rightarrow \dot{H} = \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{\ddot{a}}{a} - H^2$$

$$\dot{H} + H^2 = \frac{\ddot{a}}{a} \quad (8.47)$$

Dalla Prima Equazione di Friedmann troviamo quanto vale $\ddot{a}$, ricordando che $p = 0$ poiché abbiamo assunto $w = 0$, avremo

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi}{3}G\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) = -\frac{4\pi}{3}G\rho$$

da cui, sostituendo nella (8.47),

$$\dot{H} + H^2 = -\frac{4\pi G}{3}\rho$$

Effettuiamo una nuova derivazione nel tempo e sostituiamo $\rho = \rho_b$, densità media dell'Universo

$$\ddot{H} + 2H\dot{H} = -\frac{4\pi G}{3}\dot{\rho}_b \quad (8.48)$$

Poiché $\rho_b \propto a^{-3}$ abbiamo

$$\frac{\dot{\rho}_b}{\rho_b} = -3\frac{\dot{a}}{a}$$

e sostituiamo nella (8.48)

$$\ddot{H} + 2H\dot{H} = \frac{4\pi G}{3}3\frac{\dot{a}}{a}\rho_b$$

$$\ddot{H} + 2H\dot{H} - 4\pi G\rho_b H = 0 \quad (8.49)$$

La (8.49) non è altro che una nuova riscrittura della Prima Equazione di Friedmann che ci permette di seguire l'evoluzione di $H(t)$ nel tempo. Consideriamo la (8.42), nel caso in cui siamo possiamo trascurare il termine $k^2 c_s^2 \delta_k$ poiché $\lambda \gg \lambda_J$. Allora la (8.42) si riscrive

$$\ddot{\delta}_k + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta}_k - 4\pi G\rho_b \delta_k = 0$$

e confrontandola con la (8.49) vediamo che le due sono formalmente identiche, ciò significa che le soluzioni saranno le stesse, ovvero

$$H(t) \propto \delta$$

Siamo però giunti ad una strada apparentemente senza via d'uscita. Abbiamo infatti sempre detto che negli universi di Friedmann l'unica soluzione di interesse era quella in espansione, cioè quella che corrisponderebbe a δ_- , soluzione decrescente. Invece dal punto di vista dell'evoluzione delle strutture noi vogliamo che la soluzione porti ad una crescita e quindi abbiamo scelto δ_+ . Come risolvere la questione? Ci viene in aiuto un teorema delle equazioni differenziali.

Wronskiano: dato un insieme di n soluzioni $y_1, y_2, \dots, y_n$, della funzione differenziale omogenea

$$y^{(n)} + p_n(x)y^{(n-1)} + \dots + p_2(x)y^{(1)} + p_1(x)y = 0$$

si definisce Wronskiano il determinante della matrice quadrata, costruita mettendo le n soluzioni sulla prima riga, le n derivate prime di queste funzioni sulla seconda riga e così via fino alla derivata $n - 1$ -esima.

Nel nostro caso l'equazione differenziale è del secondo ordine

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (8.50)$$

e le soluzioni sono le due $y_1 = \delta_-$ e $y_2 = \delta_+$ della (8.42), avremo quindi

$$W := \det \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1' \quad (8.51)$$

Se la funzione di cui y_1 e y_2 sono soluzioni è definita in un intervallo e in un punto di questo intervallo $W \neq 0$, allora le due soluzioni sono linearmente indipendenti su tutto l'intervallo.

Per noi quindi W è dato da

$$W := \det \begin{bmatrix} \delta_+ & \delta_- \\ \dot{\delta}_+ & \dot{\delta}_- \end{bmatrix} \neq 0$$

L'**Identità di Abel** è un'equazione che esprime il Wronskiano di due soluzioni omogenee di un'equazione differenziale lineare del secondo ordine in termini dei coefficienti dell'equazione differenziale originale. Tale identità, poiché si riferisce a due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione differenziale originale, può essere utilizzata per trovare una soluzione partendo dall'altra. L'identità di Abel per la (8.50) con il Wronskiano come in (8.51) è

$$W' = -p(x)W \quad (8.52)$$

Dimostrazione: Calcoliamo la derivata prima del Wronskiano

$$\begin{aligned} W' &= y_2'' y_1 + y_1' y_2' - y_2' y_1' - y_2 y_1'' = y_2'' y_1 - y_2 y_1'' = \\ &= y_1(-q(x)y_2 - p(x)y_2') - y_2(-q(x)y_1 - p(x)y_1') = -y_1 p(x)y_2' + y_2 p(x)y_1' = \\ &= -p(x)(y_1 y_2' - y_2 y_1') = -p(x)W \quad (\text{cvd}) \end{aligned}$$

Nel nostro caso $p(x) \equiv 2H$, perciò

$$\frac{\dot{W}}{W} = -p(x) \equiv -2H = -2\frac{\dot{a}}{a} \Rightarrow \frac{d \ln W}{dt} = -2\frac{d \ln a}{dt}$$

integrando quindi abbiamo

$$W \propto a^{-2}$$

Poiché per noi $y_1 = \delta_-$ e $y_2 = \delta_+$, allora per l'identità di Abel varrà

$$W = y_1 y_2' - y_2 y_1' \equiv \delta_- \dot{\delta}_+ - \delta_+ \dot{\delta}_- \propto a^{-2} \quad (8.53)$$

Utilizzeremo questa identità per trovare δ_+ , nota δ_- , in particolare sfrutteremo una proprietà del differenziale di un rapporto ovvero

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\delta_+}{\delta_-} = \frac{\delta_- \dot{\delta}_+ - \delta_+ \dot{\delta}_-}{\delta_-^2} = \frac{W}{\delta_-^2} = \frac{a^{-2}}{\delta_-^2} \right)$$

che, integrata per separazione delle variabili da

$$\delta_+(t) = \delta_-(t) \int \frac{a^{-2}}{\delta_-^2} dt$$

ma poiché sappiamo che $\delta_\infty H(t)$, allora

$$\delta_+(t) = H(t) \int \frac{dt}{H^2(t) a^2} \quad (8.54)$$

che può anche essere espressa in funzione del redshift⁸:

$$\delta_+(z) = -\frac{H(z)}{a_0^2} \int \frac{(1+z) dz}{H^3(z)} \quad (8.55)$$

La (8.54) e la (8.55) ci dicono come varia la soluzione crescente, δ_+ nel tempo e nel redshift rispettivamente. Di tali equazioni non esiste una soluzione analitica, poiché non esiste neanche per $H(z)$. Conosciamo però la scrittura più generale possibile per il parametro di Hubble, ovvero la (2.26) nella Sezione 2.1.1:

$$H(z) = H_0 E(z) = H_0 (1+z) \left[1 - \sum_i \Omega_{0,w_i} + \sum_i \Omega_{0,w_i} (1+z)^{1+3w_i} \right]^{1/2} =$$

$$H(z) = H_0 (1+z) \left[(1 - \Omega_{0,m} - \Omega_{0,\Lambda}) + \Omega_{0,m} (1+z) + \Omega_{0,\Lambda} (1+z)^{-2} \right] \quad (8.56)$$

Questa è valida per qualsiasi tipo di Universo, senza considerare il contributo della radiazione. Poniamoci ora nel caso EdS ($\Omega_{tot} = \Omega_{0,m} = 1$), sostituendo la (8.56) nella (8.55) abbiamo

$$\delta_+(z) \propto H_0 (1+z)^{3/2} \int \frac{(1+z) dz}{H_0^3 (1+z)^{9/2}} \propto (1+z)^{-1} \propto a \propto t^{2/3}$$

Cioè riotteniamo esattamente lo stesso risultato trovato in Sezione 8.3 e questo significa che questo procedimento funziona.

In Figura 8.1 è mostrata la crescita delle perturbazioni δ_+ di universi dominati dalla materia, in funzione di $(1+z)$, ottenuti integrando numericamente la (8.55) per diversi

⁸Sfruttando

$$(1+z) = \frac{a_0}{a} \Rightarrow dz = -\frac{a_0}{a^2} \frac{da}{dt} H dt = -(1+z) H(t) dt$$

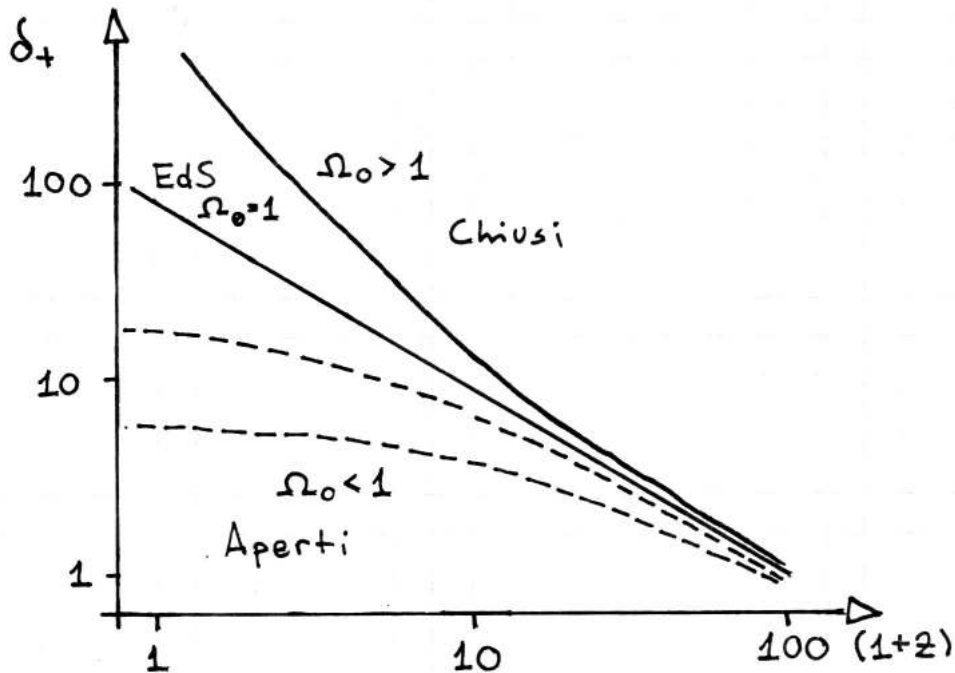


Figura 8.1: Diverse funzioni di crescita del fattore perturbazioni di densità al variare del modello cosmologico in scala (bi)logaritmica.

valori del parametro di densità Ω_0 . Si va da universi molto aperti ad universi molto chiusi, passando per il caso EdS. Il grafico mostra che andando da $z \approx 100$ a $z = 0$ la curva per $\Omega_0 = 1$ è effettivamente di pendenza -1 , ovvero le perturbazioni crescono di un fattore 100 (va esattamente come il parametro di espansione).

Negli universi aperti invece il tasso di espansione dell'Universo è maggiore e la crescita delle perturbazioni è rallentata, per $\Omega_0 \approx 0.001$ si arriva al limite in cui le perturbazioni non possono crescere affatto. Viceversa per universi chiusi, essendo il tasso di espansione più lento, le perturbazioni crescono maggiormente rispetto al caso EdS. Quindi in generale il tasso di crescita delle perturbazioni è inversamente proporzionale al tasso di espansione dell'Universo.

Il termine di costante cosmologica tende ad incrementare il tasso di espansione⁹. Anche nel caso di Universo piatto, in Universo con costante cosmologica la crescita delle perturbazioni è più lenta rispetto ad un Universo di sola materia.

Nel grafico il punto di partenza per la crescita delle perturbazioni è fissato ad un comune redshift ($z = 100$) e l'ampiezza di partenza delle perturbazioni è uguale per tutti. Si potrebbe ad esempio prendere come redshift di partenza quello di emissione della CMB e come ampiezza iniziale delle perturbazioni quella nello spettro delle sue anisotropie, che è quello che si fa peraltro..

Ragionando al contrario (Figura 8.2), osservando l'ampiezza delle perturbazioni oggi possiamo ripercorrere all'indietro la storia della loro crescita.

Nel nuovo grafico sono mostrati gli andamenti delle perturbazioni crescenti, normalizzate al valore nell'Universo attuale. Sono mostrati 3 andamenti indicativi, quello per il caso EdS e i due per Universo curvo, aperto o chiuso. Andando indietro nel tempo mi aspetto in

⁹Addirittura oggi l'espansione è accelerata.

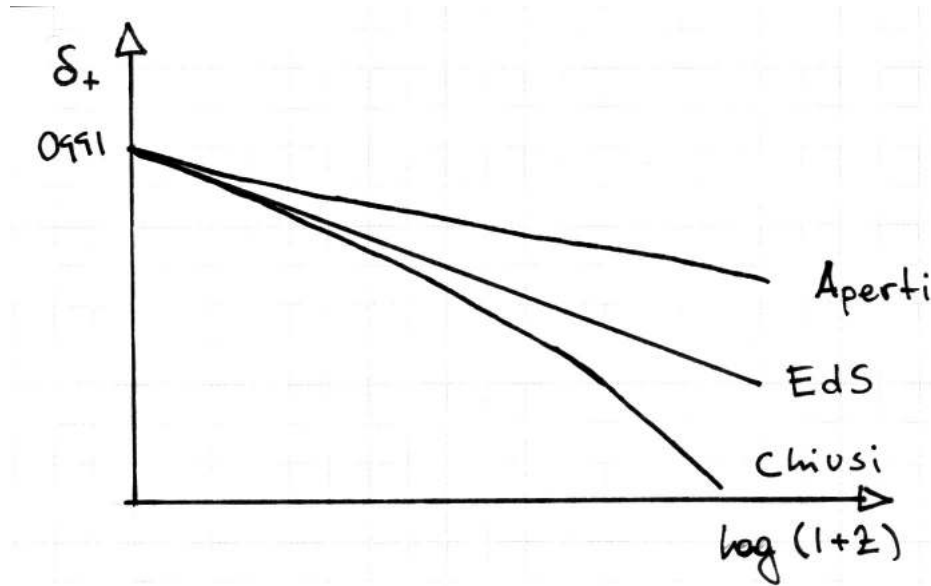


Figura 8.2: *Diverse funzioni di crescita del fattore perturbazioni di densità al variare del modello cosmologico in scala (bi)logaritmica.*

generale un Universo con sovradensità di entità minore, osservativamente dovremmo avere meno galassie e ammassi. Ad alti z , quindi, ci attendiamo che gli universi chiusi differiscano di più dalla situazione odierna rispetto a quelli aperti, poiché il gradiente nelle perturbazioni è più ripido. Per arrivare allo stesso risultato, cioè il valore di δ oggi, a seconda del tipo di Universo le perturbazioni dovranno essere state più o meno ampie all'origine. Poiché abbiamo detto che le perturbazioni in densità corrisponderebbero ad anisotropie nella temperatura della CMB, se ne studia lo spettro per comprendere e discriminare tra modelli cosmologici. I due grafici visti ora rappresentano un modo per studiare i parametri cosmologici: misurando i tassi di crescita delle perturbazioni (**growth factor**) si possono testare i diversi modelli e inoltre anche la relatività generale, poiché in questo ragionamento abbiamo parlato solo in termini di gravità.

Questa fu tra l'altro una delle prime prove dell'esistenza della materia oscura. La CMB è infatti prodotta da un mezzo precedentemente termalizzato con un plasma di materia barionica. Le fluttuazioni di temperatura che misuriamo, quindi, corrispondono alla distribuzione delle fluttuazioni di densità della componente barionica, ma abbiamo già accennato che la dark matter si disaccoppia prima dal fluido e genera delle buche di potenziale che guideranno poi il collasso della materia barionica. Questo significa che le fluttuazioni di densità oggi sono più marcate di quelle che avremmo avuto se non fosse esistita alcuna forma di materia esotica (sarebbero dovute essere dell'ordine di 10^{-3}). Nello spettro della CMB, infatti, non si misurano fluttuazioni di temperatura sufficientemente ampie (se ne misurano dell'ordine di 10^{-5}) da spiegare le attuali senza ricorrere alla DM¹⁰.

8.5 Teoria di Jeans in Universi di Radiazione

Vediamo ora cosa succede alle fluttuazioni di densità in un'epoca dominata dalla componente radiativa. Saremo interessati al comportamento nel campo di densità di energia della

¹⁰O alternativamente si potrebbe ricorrere a curvature molto chiuse ma questo è escluso dai dati.

radiazione piuttosto che in quello della materia, essendo la prima la componente dominante.

Poiché nel caso della radiazione non possiamo trascurare il termine di pressione, riscriviamo il solito set di equazioni (continuità, Eulero, Poisson), tenendo conto che $w = 1/3$ e $\rho = 3p/c^2$

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot [(\rho + \frac{3p}{c^2})\mathbf{v}] = 0 \\ (\rho + \frac{p}{c^2})[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}] = -\nabla p - (\rho + \frac{p}{c^2})\nabla \phi \\ \nabla^2 \phi = 4\pi G(\rho + \frac{p}{c^2}) \end{cases} \quad (8.57)$$

Il procedimento da seguire è lo stesso applicato negli altri casi, non facciamo i calcoli e presentiamo solamente la **relazione di dispersione** già riportata nel sistema fisico

$$\ddot{\delta}_k + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta}_k + \left(k^2 c_s^2 - \frac{32}{3}\pi G \rho_b\right)\delta_k = 0 \quad (8.58)$$

È del tutto analoga a quella ottenuta per la materia. Vediamo ora di sostituire dei valori all'interno di questa relazione. Innanzitutto che la velocità del suono a quest'epoca è

$$c_s = \frac{c}{\sqrt{3}}$$

Valgono inoltre le seguenti (vedi Tabella 2.1)

$$\rho_b = \frac{3}{32\pi G t^2}$$

$$a \propto t^{1/2} \Rightarrow \frac{\dot{a}}{a} = H = \frac{1}{2t}$$

sostituendo nella (8.58)

$$\ddot{\delta}_k + \frac{\dot{\delta}_k}{t} + \left(k^2 c_s^2 - \frac{1}{t^2}\right)\delta_k = 0 \quad (8.59)$$

Vogliamo una soluzione di tipo power-law quindi

$$\delta_k \propto t^\alpha$$

$$\dot{\delta}_k \propto \frac{\alpha}{t}\delta_k$$

$$\ddot{\delta}_k \propto \frac{\alpha(\alpha-1)}{t^2}\delta_k$$

che sostituiamo nella (8.59) e otteniamo

$$\frac{\alpha(\alpha-1)}{t^2}\delta_k + \frac{\alpha}{t^2}\delta_k + \left(k^2 c_s^2 - \frac{1}{t^2}\right)t^\alpha = 0$$

$$\alpha^2 - \alpha + \alpha + k^2 c_s^2 t^2 - 1 = 0$$

$$\alpha^2 = 1 - k^2 c_s^2 t^2 \quad (8.60)$$

Il valore $\alpha^2 = 0$ mi definisce la scala di Jeans per un Universo di radiazione, i cui valori nello spazio di Fourier e nello spazio reale sono, rispettivamente

$$k_J = \frac{1}{c_s t} = \sqrt{\frac{32\pi G \rho_b}{3c_s^2}}$$

$$\lambda_J = \frac{2\pi}{k_J} = \sqrt{c_s \frac{3\pi}{8G\rho_b}}$$

Con queste posso riscrivere la (8.60) come

$$\alpha^2 = 1 - \left(\frac{k}{k_J}\right)^2 = 1 - \left(\frac{\lambda_J}{\lambda}\right)^2 \quad (8.61)$$

Possiamo quindi distinguere tra due casi

- $\alpha^2 > 0$, cioè $\lambda > \lambda_J$ o $k < k_J$, le soluzioni della (8.59) sono reali:

$$\delta_{\pm}(\mathbf{x}, t) = \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) t^{\pm \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_J}{\lambda}\right)^2}}$$

dove la soluzione che porta all'instabilità gravitazionale è quella con il segno positivo nell'esponente di t . L'ampiezza di entrambe le soluzioni varia nel tempo e per $\lambda \gg \lambda_J \Rightarrow \delta_{\pm} \propto t^{\mp 1} \propto a^{\mp 2}$, ritroviamo lo stesso comportamento ottenuto fuori dalla scala dell'orizzonte ottenuta per la materia, nessuna sorpresa.

- per scale al di sotto della scala di Jeans, la soluzione è immaginaria e $\delta_{\pm}$ rimane un'onda, le perturbazioni non si propagano, comesssempre.

Facciamo un ultimo commento al caso in cui c'è instabilità. Essendo la velocità del suono circa uguale alla velocità della luce abbiamo dei problemi. Sostituendo all'interno della formula per la scala di Jeans infatti abbiamo

$$\lambda_J = \frac{2\pi}{k_J} = 2\pi c_s t = \frac{2\pi c}{\sqrt{3}} t$$

da confrontare con

$$\lambda_H = a(t) \int_0^t \frac{c dt'}{a(t')} = 2ct$$

da cui quindi abbiamo che $\lambda_J > \lambda_H$. Questo significa che finché domina la radiazione non è possibile definire una soluzione per perturbazioni nella densità dei fotoni all'interno del raggio dell'orizzonte. Non sono quindi presenti instabilità gravitazionali per la radiazione all'interno dell'orizzonte, questo perché le onde si propagano così velocemente da dissolvere eventuali perturbazioni: $\delta_r \approx 0$.

8.6 Fluttuazioni di Materia Oscura

Abbiamo già accennato che dopo l'equivalenza, gli aloni già formati di materia oscura guidano l'evoluzione delle fluttuazioni di densità della materia barionica. Vogliamo allora studiare l'andamento delle fluttuazioni di materia oscura per scale al di sopra della scala di Jeans durante il periodo che precede l'equivalenza. Prendiamo quindi $\lambda < \lambda_H$ e $t < t_{eq}$. Riscriviamo l'equazione risolutiva del problema (8.42)

$$\ddot{\delta}_{k,DM} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta}_{k,DM} + k^2 c_s^2 \delta_{k,DM} - 4\pi G \sum_i (\rho_{b,i} \delta_{k,i}) = 0 \quad (8.62)$$

Il primo termine parla dell'accelerazione della crescita delle perturbazioni. Il secondo è il termine che tiene conto di quanto l'espansione dell'Universo si oppone alla crescita. Il terzo è il termine di dissipazione delle velocità che si oppone alla crescita. L'ultimo termine è quello peculiare, diverso rispetto agli altri casi. Questo termine infatti tiene conto di tutte le componenti (sovradensità) che fanno gravità, la DM risponde della gravità totale, ma abbiamo che

$$\sum_i (\rho_{b,i} \delta_{k,i}) = \rho_{b,DM} \delta_{k,DM} + \rho_{b,B} \delta_{k,B} + \rho_{b,R} \delta_{k,R} \approx \rho_{b,DM} \delta_{k,DM}$$

dove il termine di radiazione però si elide poiché, per quanto visto nella sezione precedente, ogni perturbazione al campo di densità ad essa associato che abbia una scala inferiore a quella dell'orizzonte viene dispersa rapidamente per via della elevata velocità del suono nel mezzo. Essendo la materia barionica accoppiata con la radiazione le tocca di fare la stessa fine e andarsene dalla somma anche lei.

Alla fine della fiera quindi l'equazione risolutiva per le perturbazioni di DM (8.62) diventa più semplicemente

$$\ddot{\delta}_{k,DM} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta}_{k,DM} + k^2 c_s^2 \delta_{k,DM} - 4\pi G \rho_{b,DM} \delta_{k,DM} = 0 \quad (8.63)$$

È importante non dimenticare, a proposito di questa equazione, che nel termine dipendente da $\delta_{k,DM}$ entra il modello cosmologico. Stiamo studiando l'evoluzione prima dell'equivalenza, quindi dovremo assumere un Universo ad una sola componente che non è però la materia oscura ma la radiazione.

Procediamo alla risoluzione della (8.63) e, diversamente a quanto fatto nei casi precedenti, anziché cercare l'evoluzione rispetto al tempo, cambiamo variabile e cronometriamo il sistema tramite la variazione di una funzione del fattore di scala. In particolare definiamo il fattore di scala normalizzato alla scala dell'equivalenza:

$$x := \frac{a(t)}{a_{eq}}$$

da cui quindi

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} &= \frac{dx}{dt} \frac{d}{dx} = \frac{\dot{a}}{a_{eq}} \frac{d}{dx} \\ \frac{d^2}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{a}}{a_{eq}} \frac{d}{dx} \right) = \frac{\ddot{a}}{a_{eq}} \frac{d}{dx} + \frac{\dot{a}^2}{a_{eq}} \frac{d^2}{dx^2} \end{aligned}$$

Effettuiamo la sostituzione nella (8.63)

$$\frac{\ddot{a}}{a_{eq}} \delta_k + \left(\frac{\dot{a}}{a_{eq}} \right)^2 \delta_k'' + 2 \frac{\dot{a}^2}{a} \frac{1}{a_{eq}} \delta_k' - 4\pi G \rho_{b,DM} \delta_k = 0 \quad (8.64)$$

Dove l'apice ' indica la derivazione rispetto ad x e dove abbiamo trascurato il termine di dissipazione $k^2 c_s^2 \delta_k'$ poiché stiamo trattando con scale molto più grandi della scala di Jeans in cui tale termine entra in gioco.

Siccome abbiamo voluto complicarci la vita (si direbbe..) adesso dobbiamo riscrivere tutte le variabili che compaiono nell'equazione risolutiva per la nuova variabile x

- $\rho_{b,DM}$. Abbiamo già calcolato come varia la densità delle varie componenti, in particolare

$$\rho_{b,DM}(a) = \rho_{0,b,DM} \left(\frac{a_0}{a} \right)^3$$

$$\rho_{b,rad}(a) = \rho_{0,b,rad} \left(\frac{a_0}{a} \right)^4$$

$$\frac{\rho_{b,DM}}{\rho_{b,rad}} = \frac{\rho_{0,b,DM}}{\rho_{0,b,rad}} \left(\frac{a}{a_0} \right)$$

Poiché all'equivalenza $\rho_{b,DM}(a_{eq}) = \rho_{b,rad}(a_{eq})$, allora

$$\rho_{0,b,DM} \left(\frac{a_0}{a_{eq}} \right)^3 = \rho_{0,b,rad} \left(\frac{a_0}{a_{eq}} \right)^4$$

$$\frac{\rho_{0,b,DM}}{\rho_{0,b,rad}} = \left(\frac{a_0}{a_{eq}} \right)$$

quindi sostituendo

$$\frac{\rho_{b,DM}}{\rho_{b,rad}} = \frac{\rho_{0,b,DM}}{\rho_{0,b,rad}} \left(\frac{a}{a_0} \right) = \left(\frac{a_0}{a_{eq}} \right) \left(\frac{a}{a_0} \right) = \left(\frac{a}{a_{eq}} \right) = x \quad (8.65)$$

Consideriamo infine la Seconda Equazione di Friedmann per un fluido di materia oscura e radiazione

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = H^2 = \frac{8\pi}{3} G (\rho_{b,DM} + \rho_{b,rad}) = \frac{8\pi}{3} G \rho_{b,DM} \left(\frac{x+1}{x} \right)$$

dalla quale ricaviamo

$$\rho_{b,DM} = \frac{3H^2}{8\pi G} \frac{x}{x+1} \quad (8.66)$$

- $\frac{\dot{a}}{a_{eq}}$.

$$\frac{\dot{a}}{a_{eq}} = \frac{\dot{a}}{a} \frac{a}{a_{eq}} = H x \quad (8.67)$$

- $\frac{\ddot{a}}{a_{eq}}$. Consideriamo la Prima Equazione di Friedmann

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi}{3} G a \left(\rho_{b,DM} + \rho_{b,R} + \frac{3p_{b,DM}}{c^2} + \frac{3p_{b,R}}{c^2} \right)$$

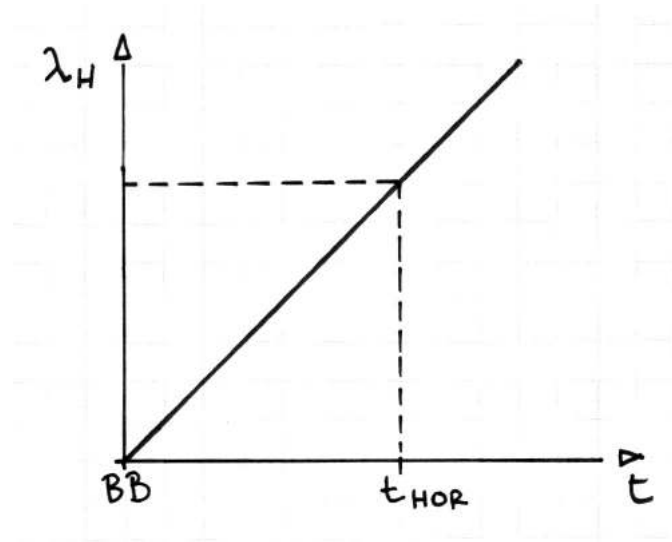


Figura 8.3: *Raggio dell'orizzonte in funzione del tempo.*

con $p_{b,DM} = 0$ per il solito motivo. Poiché $p_{b,R} = \frac{1}{3}\rho_{b,R}c^2$, allora diventa

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi}{3}G a (\rho_{b,DM} + 2\rho_{b,R})$$

dalla (8.65) e dalla (8.66)

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi}{3}G a \rho_{b,DM} \left(\frac{x+2}{x} \right) = -\frac{4\pi}{3}G a \frac{3H^2}{8\pi G} \frac{x}{x+1} \frac{x+2}{x} = -\frac{H^2}{2} \frac{x+2}{x+1} a$$

dividiamo tutto per a_{eq} , ricordando la definizione di x otteniamo

$$\frac{\ddot{a}}{a_{eq}} = -\frac{H^2}{2} \frac{x(x+2)}{x+1} \quad (8.68)$$

Sostituiamo quindi i valori trovati con le (8.66), (8.67), (8.68) nella (8.64) trovando quindi l'equazione differenziale risolutiva per la crescita delle perturbazioni di DM:

$$\delta''_{k,DM} + \frac{2+3x}{2x(1+x)} \delta'_{k,DM} - \frac{3}{2x(1+x)} \delta_{k,DM} = 0 \quad (8.69)$$

Questa è un'equazione ipergeometrica che ammette la seguente soluzione crescente

$$\delta_{k,DM,+} = 1 + \frac{3}{2}x = 1 + \frac{3}{2} \frac{a}{a_{eq}} \quad (8.70)$$

La (8.70) rappresenta l'andamento di fluttuazioni crescenti di DM per scale entro l'orizzonte in epoca radiativa. Osservando la (8.70) possiamo notare una cosa molto importante: poiché il raggio dell'orizzonte cresce nel tempo, allora scale diverse entrano nell'orizzonte a tempi diversi, scale più grandi impiegano più tempo ad entrare nell'orizzonte.

In Figura 8.3 è mostrato l'andamento crescente del raggio dell'orizzonte in funzione del tempo. Tutte le scale che si trovano al di sopra della retta ad un determinato t_{Hor} sono all'interno dell'orizzonte, quelle sotto sono al di fuori, e vi entreranno a t maggiori.

Abbiamo quindi due possibilità: o una scala è all'interno dell'orizzonte oppure non lo è. Al di fuori dell'orizzonte ogni fluttuazione di densità cresce poiché l'unica forza che sente è la gravità. Per lo stesso motivo però, tutte le componenti del fluido¹¹ sono ivi accoppiate e quindi le relative fluttuazioni crescono con lo stesso andamento della componente dominante, cioè la radiazione, perché siamo a $t < t_{eq}$, che va come a^2 .

Se una perturbazione della materia oscura che ha cominciato a crescere su una scala λ maggiore di quella dell'orizzonte ad un certo istante t_{Hor} vi entra, la sua crescita cambierà andamento cominciando a seguire la (8.70), poiché di punto in bianco si trova a valere la fisica che abbiamo appena studiato.

Consideriamo quindi una scala λ che entra nell'orizzonte ad un determinato tempo t_{Hor} e valutiamo l'andamento delle sue fluttuazioni tra t_{Hor} e t_{eq} (non possiamo andare oltre poiché la (8.70) non sarebbe più valida), le ampiezze saranno in rapporto

$$\frac{\delta(t_{eq})}{\delta(t_{Hor})} = \frac{1 + \frac{3}{2}}{1 + \frac{3}{2} \frac{a_H}{a_{eq}}}$$

Forti di questo rapporto consideriamo i due casi limite, cioè cosa succede alla più piccola e alla più grande scala che possono entrare nell'orizzonte nel lasso di tempo che va dalla nascita dell'Universo all'epoca dell'equivalenza.

La scala più piccola che potrà entrare sarà quella del più piccolo valore che può avere l'orizzonte, poiché supponiamo nel Big-Bang l'Universo fosse concentrato in un punto tale scala sarà nulla: $a = a_H \rightarrow 0$, da cui

$$\frac{\delta(t_{eq})}{\delta(t_{Hor})} = \frac{1 + \frac{3}{2}}{1 + \frac{3}{2} \frac{a_H}{a_{eq}}} \xrightarrow{a_H \rightarrow 0} \frac{5}{2}$$

Ciò significa che una fluttuazione sulla più piccola scala che può entrare nell'orizzonte prima dell'equivalenza, fino a tale momento potrà crescere al più di un fattore 5/2.

Consideriamo quindi il limite opposto, la più grande scala che potrà entrare nell'orizzonte prima di t_{eq} è quella che vi entra immediatamente prima di tale istante: $a = a_H \rightarrow a_{eq}$, da cui

$$\frac{\delta(t_{eq})}{\delta(t_{Hor})} = 1$$

ovvero non abbiamo alcuna crescita. Possiamo quindi riassumere scrivendo

$$\frac{\delta(t_{eq})}{\delta(t_{Hor})} < \frac{5}{2} \quad (8.71)$$

La (8.71) ci dice quindi che le perturbazioni di DM in epoca radiativa crescono al più di un fattore 5/2. Questo fenomeno è chiamato **effetto Meszaros** o **effetto di stagnazione**. A causa della radiazione, che influisce sul termine di frizione ($2\dot{a}/a$) nella relazione di dispersione (8.63), le fluttuazioni della DM sono inibite e non riescono a crescere. È un problema di tempi: il tempo scala di espansione dell'Universo in epoca precedente l'equivalenza $\tau_H = 1/H \propto 1/\sqrt{G\rho_R}$ è minore del tempo di free-fall $\tau_{ff} \propto 1/\sqrt{G\rho_{DM}}$ (in quanto prima dell'equivalenza $\rho_R < \rho_{DM}$). Ma dire $\tau_{ff} > \tau_H$ significa dire che le perturbazioni di DM non riescono a crescere in un tempo di Hubble.

¹¹DM inclusa!!

Ribadiamo che queste considerazioni riguardano le scale che, da un certo istante in poi, sono dentro l'orizzonte ($\lambda < \lambda_H$), tutte le fluttuazioni su scale fuori dall'orizzonte che tali rimangono possono crescere tranquillamente.

8.7 Fluttuazioni Barioniche

Fino a t_{eq} i barioni sono legati alla radiazione dai frequenti scattering Thomson e le fluttuazioni nella loro distribuzione di densità non riescono a crescere. All'epoca del disaccoppiamento, $z_{dec} \approx 1000$, però tali perturbazioni possono cominciare ad evolvere, solo che non potranno farlo liberamente. In quest'epoca infatti esistono già delle buche di potenziale sviluppate, dovute all'evoluzione delle perturbazioni di densità della materia oscura di cui abbiamo parlato. La crescita delle fluttuazioni barioniche non potrà quindi andare semplicemente come a .

Cerchiamo allora soluzioni alla relazione di dispersione delle fluttuazioni barioniche per scale $\lambda_J < \lambda < \lambda_H$ a tempi successivi il decoupling $t > t_{dec}$. Tale relazione è

$$\ddot{\delta}_{k,B} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta}_{k,B} + [\delta_{k,B}c_s^2k^2 - 4\pi G \sum_i (\rho_{b,i}\delta_{k,i})] = 0 \quad (8.72)$$

Ci mettiamo su scale $\lambda \gg \lambda_J$ dove gli effetti del campo di velocità caratteristico del fluido sono trascurabili e quindi poniamo il termine $\delta_{k,B}c_s^2k^2 \approx 0$. Per quanto riguarda il termine gravitazionale, esso tiene conto, tramite la sommatoria, di tutte le componenti del fluido in esame ma, come già visto, possiamo porre $\langle \rho_{b,R} \rangle = \langle \rho_{b,B} \rangle \approx 0$. Possiamo quindi riscrivere la (8.72) come

$$\ddot{\delta}_{k,B} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta}_{k,B} - 4\pi G\rho_{b,DM}\delta_{k,DM} = 0 \quad (8.73)$$

che ci dice una cosa importante: le fluttuazioni barioniche iniziano ad evolvere in un **Universo** che è già **disomogeneo**. Il campo gravitazionale infatti non è più omogeneo in quando la DM ha già creato delle buche di potenziale.

Al redshift in cui ci troviamo eventuali effetti di curvatura dell'Universo non sono ancora importanti quindi possiamo applicare l'approssimazione di Universo piatto. Dallo studio fatto precedentemente abbiamo ottenuto che le perturbazioni di densità della DM evolvono seguendo una legge del tipo $\delta_{k,DM} = Aa$, dove A è una costante opportuna. Facciamo un cambio di variabile

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} &= \frac{da}{dt} \frac{d}{da} = \dot{a} \frac{d}{da} \\ \frac{d^2}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left(\dot{a} \frac{d}{da} \right) = \ddot{a} \frac{d}{da} + \dot{a}^2 \frac{d^2}{da^2} \end{aligned}$$

così che la (8.73) diventi

$$\ddot{a}\delta'_{k,B} + \dot{a}^2\delta''_{k,B} + 2\frac{\dot{a}^2}{a}\delta'_{k,B} - 4\pi G\rho_{b,DM}Aa = 0 \quad (8.74)$$

l'apice indica derivazione rispetto al fattore di scala. La cosmologia dipende dalla componente dominante, cioè la DM, ricaviamo quindi le opportune Equazioni di Friedmann per ottenere l'andamento della densità in funzione di a

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_{b,DM}$$

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3}\rho_{b,DM}$$

le sostituiamo nella (8.74) trovando

$$\frac{2}{3}a\delta''_{k,B} + \delta'_{k,B} - A = 0 \quad (8.75)$$

che ammette soluzioni del tipo

$$\delta_{k,B} = B a + C \propto a \quad (8.76)$$

Inserendo quindi la soluzione¹² (8.76) nella (8.75) troviamo che $B = A$. Introduciamo la soluzione al contorno $\delta_{k,B}(a_{dec}) \approx 0$ poiché fino al disaccoppiamento le perturbazioni barioniche oscillano con la radiazione e non crescono, hanno perciò la dimensione di quando entrano nell'orizzonte cosmologico. Con tale condizione possiamo trovare il valore della costante C nella (8.76):

$$\delta_{k,B}(a_{dec}) = A a_{dec} + C = 0 \Rightarrow C = -A a_{dec}$$

per cui

$$\delta_{k,B} = A a - A a_{dec} = A(a - a_{dec}) = A a \left(1 - \frac{a_{dec}}{a}\right)$$

poiché poi $A a = \delta_{k,DM}$, allora avremo che in definitiva le **fluttuazioni dei barioni dopo il disaccoppiamento** crescono come

$$\delta_{k,B} = \delta_{DM} \left(1 - \frac{a_{dec}}{a}\right) \quad (8.77)$$

Dopo la ricombinazione e il disaccoppiamento, le fluttuazioni dei barioni $\delta_{k,B}$ evolvono a “recuperare il distacco” accumulato rispetto alla DM con una crescita facilitata dalla presenza delle buche di potenziale generate dalla DM. Quando a diventa sufficientemente maggiore di a_{dec} l'entità delle fluttuazioni di materia barionica e di DM si equivalgono, questo fenomeno è detto **baryon catch up**.

Questo processo risolve il problema dell'entità delle perturbazioni in temperatura misurate nella CMB. Delle perturbazioni dell'ordine di 10^{-5} all'epoca dell'emissione della CMB non impedisce ai barioni di recuperare lo svantaggio dovuto al precedente accoppiamento con la radiazione. È questa crescita accelerata che permette alle, seppur piccole, fluttuazioni barioniche di densità di raggiungere le dimensioni che osserviamo oggi.

8.8 Riassunto delle Soluzioni

Presentiamo quì uno schema riassuntivo dei principali risultati ottenuti sulla crescita delle perturbazioni delle varie specie in gioco, a diverse epoche cosmologiche¹³.

¹²Nella (8.76) la “B” nel pedice di $\delta_{k,B}$ sta per “barioni”, mentre la B che moltiplica per a è solo un generico coefficiente.

¹³Ricordare $z_{eq} \approx 10^4$ e $z_{dec} \approx 10^3$.

- **Prima dell'equivalenza, $t < t_{\text{eq}}$.**

N.B.: In quest'epoca la scala di Jeans è tale che $\lambda_J > \lambda_H$.

- **Fuori dall'orizzonte, $\lambda > \lambda_H$:** la crescita delle perturbazioni è guidata dalla radiazione, $\delta_R \propto a^2$. La materia barionica è ancora accoppiata alla radiazione. La materia oscura è accoppiata a quella barionica dalla gravità, vale quindi $\delta_{DM} \propto \delta_B \propto a^2$.

(Le soluzioni per questa epoca vengono trovate assumendo, ragionevolmente, EdS)

- **Dentro l'orizzonte, $\lambda < \lambda_H < \lambda_J$:** le fluttuazioni di densità della radiazione (e ad esse accoppiate per scattering Compton quelle della materia barionica), non crescono e si propagano come onde, presto disperse poiché la velocità del suono in questo mezzo è fortemente relativistica. La DM è disaccoppiata dal resto del fluido e subisce la *stagnazione*, la p_{rad} si oppone al collasso gravitazionale e le perturbazioni possono crescere al più di un fattore $5/2$.

- **Prima del decoupling, $t_{\text{eq}} < t < t_{\text{dec}}$.**

N.B.: da quest'epoca in poi la scala dell'orizzonte è più grande della scala di Jeans.

- **Fuori dall'orizzonte, $\lambda > \lambda_H$:** la DM guida la crescita, $\delta_{DM} \propto a$. C'è accoppiamento di materia barionica e DM grazie alla gravità: $\delta_B \propto \delta_{DM} \propto a$.

N.B.: questi andamenti sono validi per modelli EdS ma, in quest'epoca, potrebbero già essere presenti degli effetti dovuti alla curvatura (c'è da dire comunque che sarebbero molto trascurabili).

- **Sopra la scala di Jeans, $\lambda_J < \lambda < \lambda_H$:** la DM cresce, $\delta_{DM} \propto a$. Le fluttuazioni dei barioni continuano ad oscillare, non c'è crescita poiché è ancora molto forte l'accoppiamento con la radiazione che tende a dissipare le perturbazioni.
- **Sotto la scala di Jeans, $\lambda < \lambda_J$:** anche la DM oscilla, c'è cancellazione delle perturbazioni (argomento che vedremo più avanti).

- **Dopo il decoupling, $t_{\text{eq}} < t < t_{\text{dec}}$.**

N.B.: da questa fase in poi la curvatura dell'Universo gioca un ruolo importante.

- **Fuori dall'orizzonte, $\lambda > \lambda_H$:** l'unica forza in gioco è la gravità, quindi domina la DM, $\delta_B \propto \delta_R \propto \delta_{DM}$, ha diversi andamenti a seconda della curvatura.

- * **Universi chiusi** $\delta_{DM} > a$;

- * **Universi EdS** $\delta_{DM} = a$;

- * **Universi aperti** $\delta_{DM} < a$.

(nota: “ $> a$ ” e “ $< a$ ” sono da leggersi “più” e “meno velocemente di a ”)

- **Sopra la scala di Jeans, $\lambda_J < \lambda < \lambda_H$:** la materia oscura mantiene gli stessi andamenti del caso sopra. La radiazione δ_R continua ad oscillare. Le perturbazioni della materia barionica cominciano a crescere in maniera accelerata rispetto a quelle della DM, fino a raggiungerne il valore, **baryon catch up**: $\delta_B \propto \delta_{DM}(1 - a_{\text{dec}}/a)$.
- **Sotto la scala di Jeans, $\lambda < \lambda_J$:** tutte le componenti del fluido oscillano, nel senso che le perturbazioni vengono trasportate come onde e non crescono né si dissipano.

Mostriamo per concludere due grafici riassuntivi della crescita delle perturbazioni per le diverse specie in gioco, nel caso in cui non sia presente materia oscura nell'universo (Figura 8.4) e nel caso in cui invece sia presente (Figura 8.5). Si noti come, nel caso con DM la crescita delle perturbazioni barioniche dopo il disaccoppiamento tende asintoticamente a quella della DM che, tra z_{eq} e z_{dec} , sviluppa delle buche di potenziale.

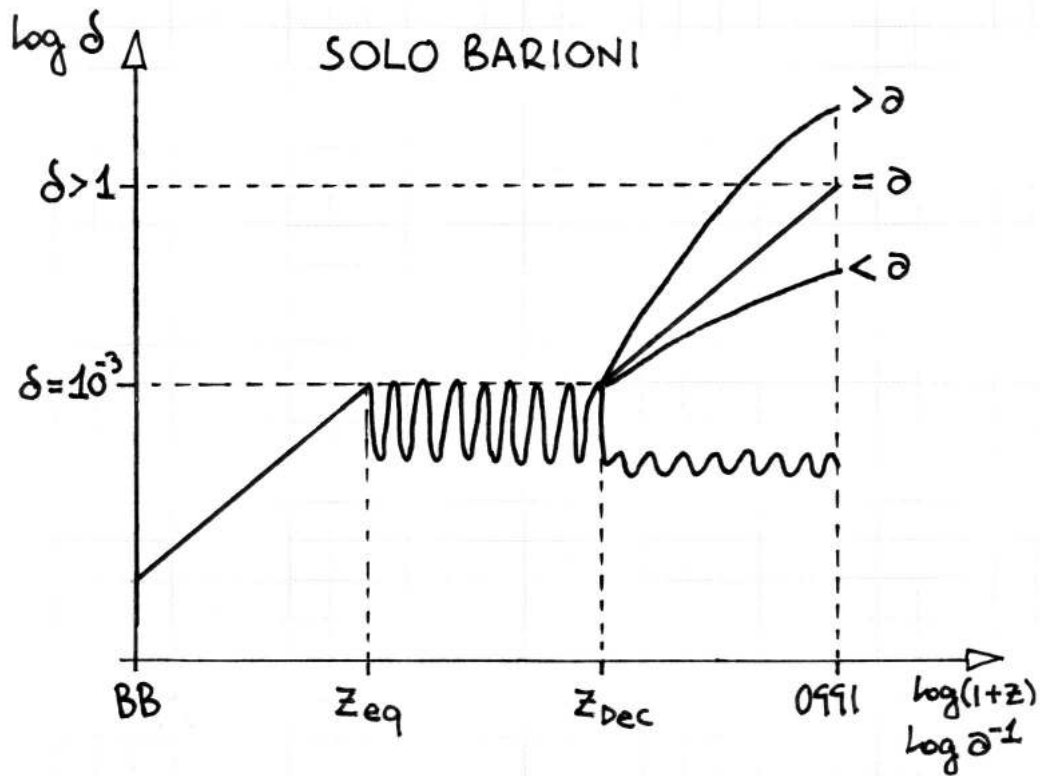


Figura 8.4: Grafico che mostra l'andamento del logaritmo di δ per barioni e radiazione in un Universo senza DM.

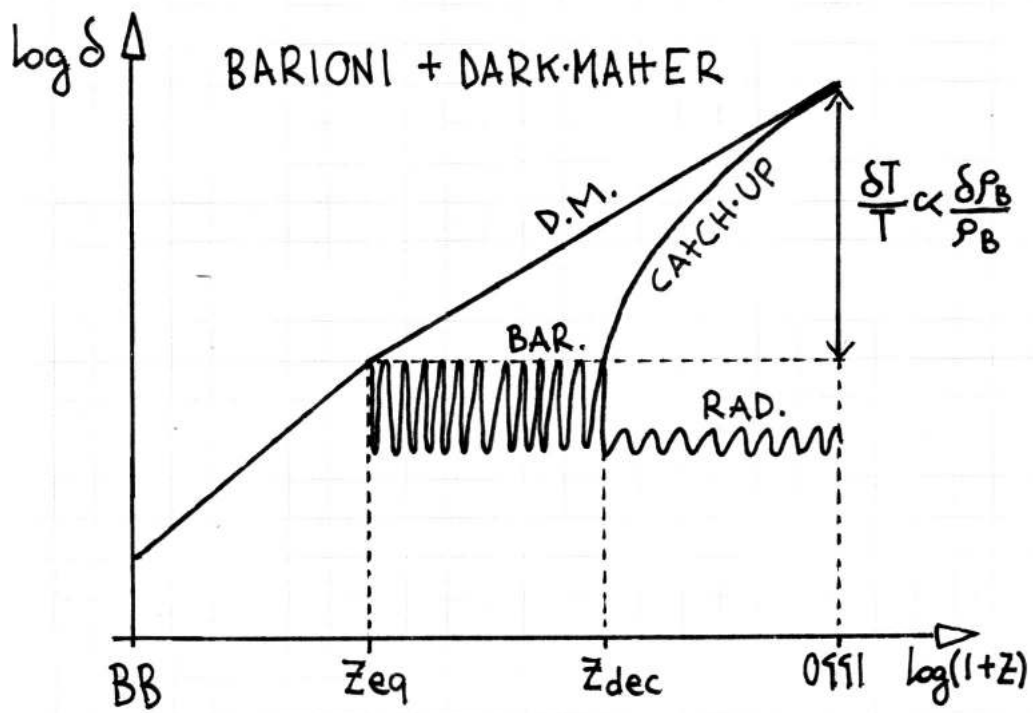


Figura 8.5: Grafico che mostra l'andamento del logaritmo di δ per barioni e radiazione in un Universo con DM. Si noti il catch up asintotico della materia barionica nei confronti di quella oscura.

Capitolo 9

Massa di Jeans e di Dissipazione

Abbiamo fin'ora parlato in termini di scale (dell'orizzonte, di Jeans, delle fluttuazioni), ci proponiamo quì di fissare dei valori per quanto riguarda le masse contenute all'interno di tali scale. Introduciamo a tal scopo la **massa di Jeans**

$$M_J := \frac{4}{3}\pi\rho_i\lambda_J \quad (9.1)$$

dove vale la relazione $\lambda_J = \frac{2\pi}{k_J}$, indica la massa della componente i contenuta all'interno di un volume sferico di raggio la relativa scala di Jeans, λ_J .

9.1 Tipologie di Materia Oscura

Quando parliamo di materia oscura intendiamo un tipo di materia il cui unico tipo di interazione è gravitazionale, più precisamente si dovrebbe dire che è un tipo di materia che interagisce debolmente con la radiazione. La materia oscura è quindi **non collisionale** e non ha senso parlare della velocità del suono della DM in termini di rapporto tra i gradienti di densità e pressione, come si fa per la materia barionica. Per la DM si parla di velocità del suono, con un abuso di terminologia, intendendo la **dispersione di velocità** delle particelle che la compongono, che però a fini pratici sortisce lo stesso effetto di c_s per i sistemi collisionali.

Distinguiamo tra due tipi di materia oscura: la **materia oscura calda, HDM**, e la **materia oscura fredda, CDM**. Per capire tale distinzione introduciamo due tempi scala (cronometrati dal fattore di espansione).

- **a_{nr} , epoca di de-relativizzazione**: istante di tempo in cui la velocità caratteristica delle particelle di DM (la dispersione di velocità di cui sopra) diventa non relativistica. Tale istante è calcolato ponendo all'equilibrio l'energia termica con l'energia a riposo di tali particelle:

$$k_B T(a_{nr}) = m_x c^2$$

dove $T(a_{nr})$ è la temperatura di de-relativizzazione di particelle di DM di massa m_x . Quando $T > T(a_{nr})$ le particelle sono relativistiche, particelle più massicce si de-relativizzano prima di quelle leggere. Per ogni possibile candidato possiamo quindi sapere in che epoca questo è diventato una componente non relativistica dell'Universo.

- **a_{dx} , epoca di disaccoppiamento della DM** dal fluido cosmologico: dopo questo istante la DM può interagire con le altre componenti dell'Universo solo gravitazionalmente. Abbiamo detto che la DM interagisce “debolmente” con la radiazione, il tempo tipico delle collisioni con i fotoni è dato dalla

$$\tau_{coll} = \frac{1}{n\sigma_{weak}C}$$

mentre per i barioni la sezione d'urto offerta alle collisioni è quella Thomson, la sezione d'urto che entra in gioco per la DM, σ_{weak} è molto piccola, quindi τ_{coll} è un tempo grande. Le interazioni tra DM e fotoni sono quindi estremamente (ma molto estremamente!) rare.

Non abbiamo attualmente un'idea chiara di cosa componga la materia oscura ma, come dicevamo, possiamo distinguere tra due tipologie:

- **$a_{dx} < a_{nr}$** . Se la de-relativizzazione della DM avviene dopo il disaccoppiamento allora m_x deve essere una massa sufficientemente piccola, si parla di **materia oscura calda (HDM)**. Il miglior candidato attualmente per la HDM è il neutrino.
- **$a_{dx} > a_{nr}$** . Se invece la de-relativizzazione della DM avviene prima del disaccoppiamento allora le particelle di materia oscura sono massicce (i.e. m_x è grande). In questo caso parliamo allora di **materia oscura fredda (CDM)**. Esistono attualmente molti possibili candidati per le particelle di CDM, nessuno dei quali è mai stato detettato (molto successo stanno avendo i WIMPs).

Notare che la distinzione parla della relativisticità al momento del **disaccoppiamento della DM** dal fluido cosmologico, a_{dx} , da non confondere con il disaccoppiamento della materia barionica dalla radiazione, a_{dec} .

9.2 Massa di Jeans di HDM e di CDM

Andiamo ora a studiare come varia lo scenario di crescita delle perturbazioni nei due diversi casi possibili per la DM. Possiamo subito capire quale sia il nocciolo delle questione se richiamiamo la forma generale della scala di Jeans

$$\lambda_J \propto \frac{v}{\sqrt{\rho}} \quad (9.2)$$

dove v è la velocità caratteristica della componente in esame. È quindi evidente quale sia la profonda differenza che intercorre tra i due differenti tipi di materia oscura che abbiamo definito. Ci attendiamo infatti che, data la sostanziale differenza nelle velocità tipiche delle particelle che la compongono,

$$\lambda_{J,HDM} \gg \lambda_{J,CDM}$$

Tale disuguaglianza ci dice quindi che gli scenari di formazione delle strutture saranno estremamente differenti per i due tipi di DM. In particolare, le dimensioni delle strutture primordiali progenitrici di quelle attuali dipenderanno dal modello assunto per la materia oscura.

Andiamo allora ad indagare come cambia nel tempo la velocità tipica della materia oscura:

- $a < a_{nr}$, prima dell'epoca della de-relativizzazione la velocità tipica della DM va come la velocità del suono del fluido radiativo,

$$v_{DM} \approx \frac{c}{\sqrt{3}} = cost \quad (9.3)$$

;

- $a > a_{nr}$, due casi
 - $a_{nr} < a < a_{dx}$, comportamento valido esclusivamente per la CDM¹. Le particelle di CDM sono accoppiate con il fluido cosmologico, quindi

$$v_{DM}^2 \propto T_R \propto a^{-1}$$

$$v_{DM} \propto a^{-1/2} \quad (9.4)$$

- $a_{dx} < a < a_{eq}$ per la CDM, $a_{nr} < a < a_{eq}$ per la HDM. La DM è disaccoppiata e si muove con moto libero, la velocità di una particella in coordinate fisiche è

$$u = \frac{dr}{dt} = H r + v_p$$

dove v_p è la **velocità peculiare**, generata da una distribuzione non omogenea di materia, si tratta di un termine perturbativo (*vedi teoria di Jeans*). Poiché il moto è libero la velocità delle particelle è costante e quindi in un intervallo di tempo infinitesimo δt la velocità è²

$$\delta u = H \delta r + \delta v_p$$

quindi $\delta v_p = -H \delta r = -H v_p \delta t$ da cui

$$H v_p \delta t + \delta v_p = 0$$

separando le variabili ed esplicitando $H = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{d}{dt} \frac{1}{a}$

$$\frac{\delta v_p}{v_p} = -H \delta t = -\frac{\delta a}{\delta t} \frac{\delta t}{a} = -\frac{\delta a}{a}$$

che integriamo ottenendo

$$v_{DM} \propto a^{-1} \quad (9.5)$$

¹La HDM per definizione ha $a_{dx} < a_{nr}$

²nota: stiamo considerando un intervallo temporale piccolo quindi possiamo assumere che $H(t) \approx cost$ da cui quindi

$$\delta(H r) = H \delta r + r \delta H \approx H \delta r$$

L'andamento (9.5) viene mantenuto anche dopo l'equivalenza.

Possiamo ora calcolare l'andamento della massa di Jeans nelle diverse epoche cosmiche. Dobbiamo tenere conto che le densità che compaiono nella (9.1) e nella (9.2) non sono la stessa, infatti nella prima entra la densità della materia oscura poiché a questa siamo interessati, mentre nella seconda quella della componente dominante, che cambia a epoche cosmologiche diverse. Prima dell'equivalenza è la radiazione la componente dominante quindi avremo che nella (9.2) entrerà

$$\rho_R \propto a^{-4}$$

mentre dopo l'equivalenza predomina la materia, la densità è quindi quella della materia oscura

$$\rho_{DM} \propto a^{-3}$$

Assunto che le epoche di disaccoppiamento e de-relativizzazione siano sempre precedenti all'equivalenza, calcoliamo la variazione della massa della materia oscura. Distingueremo 4 casi individuati dagli andamenti dominanti di velocità e densità.

1. $a < a_{nr}$ domina la radiazione e la velocità media delle particelle di DM va come in (9.3):

$$\lambda_J \propto \frac{cost}{a^{-2}} \propto a^{-2}$$

da cui

$$M_J \propto \lambda_J^3 \rho_{DM} \propto a^3 \quad (9.6)$$

2. $a_{nr} < a < a_{dx}$ domina la radiazione e la velocità media delle particelle di DM va come in (9.4) (caso valido solo per CDM):

$$\lambda_J \propto \frac{a^{-1/2}}{a^{-2}} \propto a^{3/2}$$

da cui

$$M_J \propto a^{9/2} a^{-3} \propto a^{3/2} \quad (9.7)$$

3. $a_{dx} < a < a_{eq}$ domina la radiazione e la velocità media delle particelle di DM va come in (9.5):

$$\lambda_J \propto \frac{a^{-1}}{a^{-2}} \propto a$$

da cui

$$M_J \propto a^3 a^{-3} \propto cost \quad (9.8)$$

4. $a > a_{eq}$ domina la materia e la velocità media delle particelle di DM va come in (9.5):

$$\lambda_J \propto \frac{a^{-1}}{a^{-3/2}} \propto a^{1/2}$$

da cui

$$M_J \propto a^{3/2} a^{-3} \propto a^{-3/2} \quad (9.9)$$

I diversi andamenti sono riassunti in Figura 9.1, a sinistra per la HDM e a destra per la CDM. Vediamo che in generale la massa di Jeans per la materia oscura cresce con il tempo fino ad arrivare al disaccoppiamento in cui si stabilizza su di un valore costante, giunti all'equivalenza comincia a decrescere. Si distingue il caso della CDM che presenta due andamenti di crescita, prima di a_{nr} infatti, cresce più velocemente.

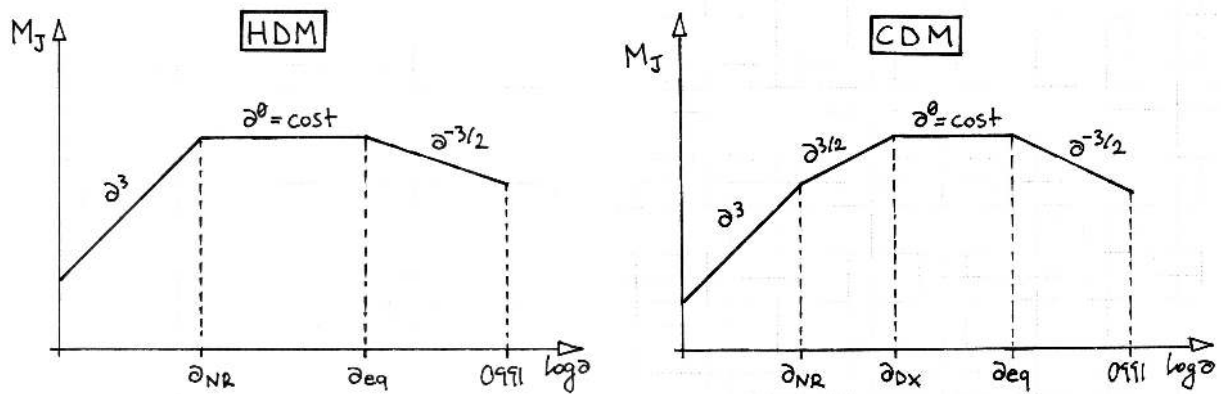


Figura 9.1: Grafico che mostra gli andamenti della massa di Jeans della HDM (sinistra) e della CDM (destra) a cavallo di varie epoche cosmologiche.

Gli andamenti mostrati nei grafici ci permettono inoltre di stabilire, alle diverse epoche, quale sia la massa minima che una perturbazione deve avere per poter crescere, come si vede infatti tale possibilità è funzione del tempo³.

È inoltre interessante notare che esiste un valore massimo che può avere la massa di Jeans, sia per HDM che per CDM. Tutte le perturbazioni di massa superiore di tale valore sono potute crescere per tutta la durata della vita dell'Universo. Tale valore massimo è quello della massa di Jeans all'equivalenza ($M_J(z_{eq})$) e dipende dal candidato scelto per la materia oscura. Nel caso di HDM l'ipotesi più accreditata è quella del neutrino massivo che, muovendosi alla velocità della luce, porta a $M_J(z_{eq}) \approx 10^{16} M_\odot$ che è un valore più grande dei più grandi oggetti virializzati che si osservano nell'Universo cioè gli ammassi di galassie ($M \leq 10^{15} M_\odot$). Per quanto riguarda la CDM invece i migliori candidati attuali sono le WIMPs, che darebbero $M_J(z_{eq}) \approx 10^{5 \div 6} M_\odot$, un valore più verosimile, dell'ordine della massa degli ammassi globulari.

Si distingueranno due storie di formazione delle strutture differenti. Per HDM lo scenario previsto è di tipo Top-Down, tutte le strutture con massa minore di M_J si formerebbero per **frammentazione** di strutture più grandi. Viceversa per la CDM lo scenario è di tipo Bottom-Up, in primis si formano le strutture piccole che poi per **aggregazione gerarchica** vanno a formare le strutture più grandi che osserviamo oggi.

³O di chi ne fa le veci, in questo caso a .

9.3 Massa di Jeans dei Barioni

Per la materia barionica la scala di Jeans è data ancora dalla (9.2), dove la densità che compare nella formula è quella della componente dominante. In questo caso però abbiamo a che fare con una materia collisionale, ha quindi senso definire la velocità del suono come rapporto tra i gradienti di pressione e densità

$$c_s^2 := \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{S=const}$$

che può essere approssimata con la

$$c_s = \left(\frac{p}{\rho} \right)^{1/2} = \left(\frac{p_B + p_R}{\rho_B + \rho_R} \right)^{1/2} \quad (9.10)$$

con p_B e ρ_B pressione e densità barioniche, p_R e ρ_R pressione e densità di radiazione. Poiché in epoche diverse dominano componenti diverse, ci attendiamo che nella storia dell'Universo la velocità del suono nella materia barionica cambi andamento se cambia la componente dominante.

Cerchiamo allora il momento nella storia dell'Universo in cui $\rho_B = \rho_R$, ovvero il momento dell'**equivalenza materia barionica-radiazione**⁴, poniamo quindi

$$\rho_B(z_{eq,B}) = \rho_R(z_{eq,B})$$

$$\rho_{B,0}(1 + z_{eq,B})^3 = \rho_{R,0}(1 + z_{eq,B})^4$$

$$1 + z_{eq,B} = \frac{\rho_{B,0}}{\rho_{R,0}} = \frac{0.04}{10^{-5}} \approx 4 \cdot 10^3$$

Dopo il disaccoppiamento, cioè a $z < z_{eq,B} \approx 4 \cdot 10^3$, dalla somma nella (9.10) il termine relativo alla radiazione scompare (è trascurabile). Poiché sappiamo che il disaccoppiamento avviene prima dell'equivalenza barioni-radiazione, $z_{dec} \approx 10^3$, possiamo calcolarci l'andamento della velocità del suono nelle diverse epoche cosmiche usando la (9.10):

- $a < a_{eq,B}$, la radiazione domina sia sulla pressione che sulla densità, quindi

$$c_s^2 = \frac{p_R}{\rho_R} = \frac{c^2}{3}$$

$$c_s = \frac{c}{\sqrt{3}} = const \quad (9.11)$$

- $a_{eq,B} < a < a_{dec}$, questo periodo **non esiste**, abbiamo infatti già detto che $a_{dec} < a_{eq,B}$, lo riportiamo per completezza. Poiché ci troveremmo dopo l'equivalenza avremmo che il contributo dominante alla densità sarebbe quello dei barioni, mentre a dominare sulla pressione sarebbe la radiazione, poiché le due componenti non sarebbero ancora disaccoppiate. Avremmo quindi

$$c_s^2 = \frac{p_R}{\rho_B} \propto \frac{a^{-4}}{a^{-3}} \propto a^{-1}$$

⁴Il tempo dell'equivalenza che abbiamo considerato fin ora infatti era relativo alla materia oscura, componente dominante in massa della materia.

$$c_s \propto a^{-1/2} \quad (9.12)$$

- $a > a_{dec}$, pressione e densità sono dominate dalla componente barionica, ricordando che $p_B = NK_B T = \frac{\rho_B}{m_B} K_B T$ quindi

$$c_s^2 = \frac{p_B}{\rho_B} = \frac{\rho_B T_B}{\rho_B} = T_B \propto a^{-2}$$

$$c_s \propto a^{-1} \quad (9.13)$$

Possiamo quindi calcolare i diversi andamenti di scala e massa di Jeans, con le

$$\lambda_{J,B} \propto \frac{c_s}{\sqrt{\rho_{dom}}} \quad (9.14)$$

$$M_{J,B} \propto \rho_B \lambda_{J,B}^3 \quad (9.15)$$

- $a < a_{eq}$, la componente dominante è la radiazione: $\rho_{dom} = \rho_R \propto a^{-4}$, quindi

$$\lambda_J \propto \frac{cost}{a^{-2}}$$

$$M_J \propto a^6 a^{-3} \propto a^{-3}$$

- $a_{eq} < a < a_{eq,B}$, la componente dominante sono i barioni: $\rho_{dom} = \rho_B \propto a^{-3}$, quindi

$$\lambda_J \propto a^{3/2}$$

$$M_J \propto a^{9/2} a^{-3} \propto a^{3/2}$$

- $a_{eq,B} < a < a_{dec}$, la componente dominante sono i barioni: $\rho_{dom} = \rho_B \propto a^{-3}$, quindi

$$\lambda_J \propto a^{-1/2} a^{3/2} \propto a$$

$$M_J \propto a^3 a^{-3} \propto cost$$

- $a > a_{dec}$, la componente dominante sono i barioni: $\rho_{dom} = \rho_B \propto a^{-3}$, quindi

$$\lambda_J \propto a^{-1} a^{3/2} \propto a^{1/2}$$

$$M_J \propto a^{3/2} a^{-3} \propto a^{-3/2}$$

Riportiamo in Figura 9.2 un grafico con tutti gli andamenti della massa di Jeans relativa alla materia barionica alle diverse epoche cosmologiche. Interessante notare che al disaccoppiamento, come visto, $M_J \propto a^{3/2}$ ma, poiché viene a mancare il sostegno dovuto alla pressione di radiazione che fino a quel momento contrasta il collasso, c'è un crollo nella normalizzazione della retta.

Anche in questo caso come per la DM, raggiunto un valore massimo, la M_J rimane per un certo periodo costante per poi decrescere. Tale valore massimo è dato da

$$M_J(a_{dec}) \approx 10^{16} M_\odot$$

Ogni perturbazione con massa superiore a questa cresce inevitabilmente.

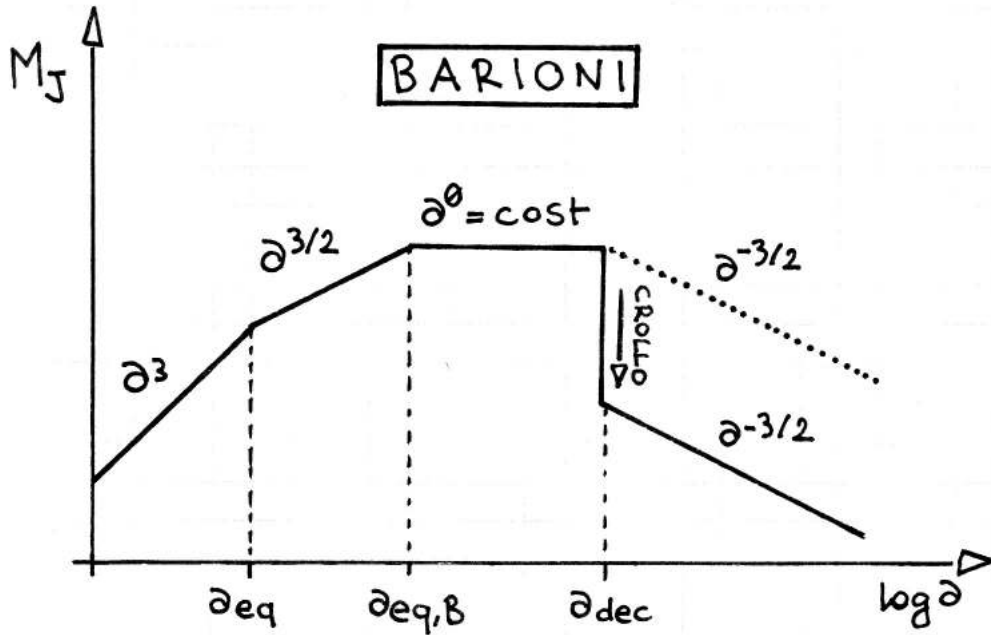


Figura 9.2: Grafico che mostra gli andamenti della massa di Jeans della materia barionica a cavallo di varie epoche cosmologiche.

Per la fisica dei barioni il momento fondamentale è quello del decoupling (mentre per la materia oscura era l'equivalenza). Tutte le perturbazioni che sopravvivono alle oscillazioni prima di questo istante sono poi destinate a crescere. Le strutture collassate più grandi che vediamo oggi sono gli ammassi di galassie, che arrivano a $10^{15} M_\odot < M_{J,B}(a_{dec})$. Questo significa che, se non esistessero le buche di potenziale già formate dalla DM al momento del disaccoppiamento, la materia barionica avrebbe dovuto sicuramente formare strutture per frammentazione (scenario top-down). Poiché invece tali buche di potenziale esistono e guidano l'evoluzione delle perturbazioni della materia barionica, la massa di Jeans dei barioni non ha un ruolo rilevante. Il discorso sarà più chiaro quando avremo introdotto la massa di Silk e la dissipazione delle perturbazioni nella prossima Sezione.

9.4 Dissipazione delle Perturbazioni

Abbiamo accennato più volte agli effetti dissipativi che agiscono sulle perturbazioni con scale minori di quella di Jeans. In particolare abbiamo infatti visto che le soluzioni alla relazione di dispersione in questi casi sono sotto forma di onde dissipative. Vogliamo ora analizzare il problema in maniera più dettagliata. Ci chiediamo quindi cosa succede alle perturbazioni su scale $\lambda < \lambda_J$ e come avviene tale dissipazione.

9.4.1 Materia Oscura e Free Streaming

Nel caso della DM non si può parlare di vera e propria dissipazione poiché abbiamo a che fare con materia non collisionale.

Quando la materia oscura si disaccoppia, le sue particelle cominciano a propagarsi liberamente rispondendo al campo gravitazionale medio dell'Universo che tende a smorzare le fluttuazioni. Definiamo **scala di free-streaming** lo spazio percorso da una particella di materia oscura in un tempo t :

$$\lambda_{fs}(t) = a(t) \int_0^t \frac{v(t')}{a(t')} dt' \quad (9.16)$$

dove v è la velocità di oscillazione delle perturbazioni. La definizione è molto simile a quella della scala dell'orizzonte cosmologico, la quale rappresenta lo spazio percorso dalla radiazione nel tempo t , quando la velocità di propagazione è quella della luce.

Possiamo quindi definire, in maniera analoga a quanto fatto per la scala di Jeans, una **massa di free-streaming**, poiché come abbiamo visto parlare di scale in lunghezza o in massa è equivalente,

$$M_{FS} \propto \lambda_{FS}^3 \rho_{DM} \quad (9.17)$$

Ogni perturbazione che, ad un determinato istante t , si trova ad avere una massa minore di quella di free-streaming viene cancellata.

Il problema ora è quello di risolvere l'integrale nella (9.16). Abbiamo visto che gli andamenti di v ed $a(t)$ cambiano durante l'evoluzione dell'Universo, in particolare $a \propto t^{1/2}$ prima dell'equivalenza e $a \propto t^{2/3}$ dopo l'equivalenza.

Vediamo quindi cosa succede nelle diverse epoche:

- $a < a_{nr}$, prima della de-relativizzazione l'andamento della velocità è costante, equazione (9.3):

$$a \propto t^{1/2} \Rightarrow dt \propto a da$$

$$\lambda_{FS} \propto a \int_0^t \frac{dt}{a(t)} \propto a \int_0^a \frac{a' da'}{a(t')} \propto a^2 \quad (9.18)$$

$$M_{FS} \propto a^6 a^{-3} \propto a^3 \quad (9.19)$$

- $a_{nr} < a < a_{dx}$ (solo CDM), l'andamento della velocità è quello della (9.4):

$$\lambda_{FS} \propto a \int_0^t \frac{v dt'}{a(t')} = a \left[\int_0^{t_{nr}} \frac{c dt'}{a(t')} + \int_{t_{nr}}^t \frac{v dt'}{a(t')} \right] = a \left[a_{nr} + \int_{a_{nr}}^a \frac{a'^{-1/2} a' da'}{a'} \right] = a[a_{nr} + a^{1/2}]$$

$$\lambda_{FS} \propto a^{3/2} \quad (9.20)$$

$$M_{FS} \propto a^{9/2} a^{-3} \propto a^{3/2} \quad (9.21)$$

- $a_{dx} < a < a_{eq}$, per la CDM, o $a_{nr} < a < a_{eq}$, per la HDM, l'andamento della velocità è quello della (9.5):

$$\lambda_{FS} \propto a \left[\int_0^{a_{nr}} da' + \int_{a_{nr}}^a \frac{a'^{-1} a' da'}{a'} \right] \propto a[const + \ln a]$$

$$\lambda_{FS} \propto a \ln a \quad (9.22)$$

$$M_{FS} \propto (\ln a)^3 \quad (9.23)$$

- $a > a_{eq}$, l'andamento della velocità è ancora quello della (9.5):

$$\lambda_{FS} \propto a \left[c_1 + \ln c_2 + \int_{a_{eq}}^a \frac{a'^{-1} a'^{1/2} da'}{a'} \right] \propto a[const + \sqrt{a}]$$

prevale il termine che moltiplica per la costante tra i due, quindi

$$\lambda_{FS} \propto aa \quad (9.24)$$

$$M_{FS} \propto a^3 a^{-3} \propto const \quad (9.25)$$

In Figura 9.3 è mostrato l'andamento della massa di free-streaming ad epoche cosmologiche diverse. Si può notare come tale massa cresca con andamenti diversi fino al momento dell'equivalenza, dopo il quale diventa costante. A t_{eq} , quindi, tutte le perturbazioni con $M < M_{FS}(a_{eq})$ vengono cancellate. Il fenomeno che produce il free-streaming sono le oscillazioni che sono legate alla scala di Jeans: entrambe le scale dipendono essenzialmente dalla stessa velocità media delle particelle. La differenza sta nel fatto che la scala di Jeans è definita, puntualmente per ogni t , come il valore discriminante per il tipo di soluzione che ha l'equazione di dispersione delle fluttuazioni di densità, stabilisce quindi se abbiamo o meno una soluzione oscillante. La scala di free-streaming d'altra parte definisce la distanza **totale** percorsa dalle particelle di materia oscura da $t = 0$ sino ad un generico tempo t , è quindi una quantità integrale che si accumula nel tempo (tiene traccia della storia passata). Per questo motivo, mentre M_J può decrescere quando decresce la velocità, M_{FS} sarà sempre una funzione crescente del tempo e potrà al più diventare costante, cosa che succede all'equivalenza. In questo istante abbiamo che $M_{FS}(z_{eq}) \equiv M_J(z_{eq})$, ma abbiamo anche che M_J comincia a decrescere. Da questo momento in poi le oscillazioni delle perturbazioni non contano più, infatti tutte le fluttuazioni che potevano dare origine a soluzioni oscillatorie

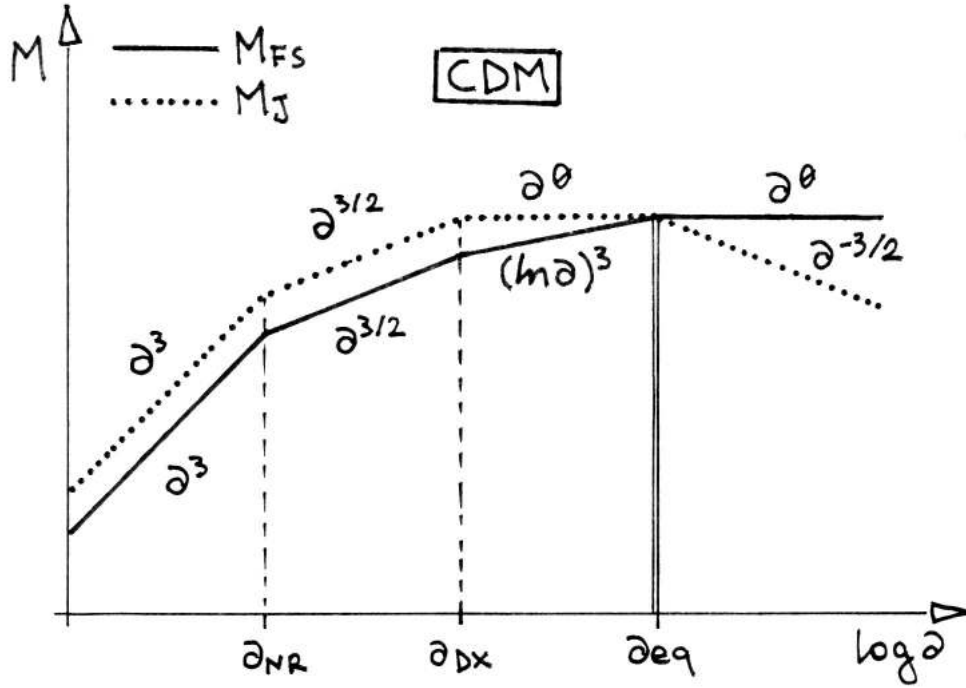


Figura 9.3: Grafico che mostra gli andamenti della massa di free-streaming della materia oscura a cavallo di varie epoche cosmologiche.

sono state cancellate, tutte le altre si sono avviate alla crescita poiché contemporaneamente superiori sia al limite di free-streaming che a quello di Jeans.

Ultima nota, ricordiamo che $M_J(z_{eq})$ vale $10^{5\div6} M_\odot$ per la CDM e $10^{16} M_\odot$ per la HDM, in questo secondo caso però una massa così grande non consente la sfericità della struttura che quindi subisce effetti mareali di autogravità che la portano alla frammentazione.

9.4.2 Materia Barionica e Dissipazione

Nel caso dei barioni, la dissipazione è reale, essi sono infatti accoppiati ai fotoni tramite scattering Thomson fino al disaccoppiamento. Ciò significa che elettroni e fotoni subiscono urti reciproci continui che mantengono i due fluidi all'equilibrio.

Se il tempo medio tra una collisione e l'altra dei fotoni è dato dalla

$$\tau_{coll} = \frac{1}{n_e \sigma_T c}$$

allora la distanza media propria percorsa da un fotone è detta **libero cammino medio** e è data dalla

$$l(t) = -c \tau_{coll} = \frac{1}{x n_e \sigma_T} \propto \rho_b^{-1} \propto a^3 \quad (9.26)$$

dove x è la frazione di ionizzazione che qui assume il significato di “frazione di elettroni liberi” (infatti tale frazione va inserita nelle formule poiché diminuisce nel tempo fino al disaccoppiamento), n_e è la densità di elettroni (o, equivalentemente, di ioni), σ_T la sezione d'urto Thomson e c la velocità della luce, presa come velocità tipica delle particelle costituenti il plasma. Nel caso di fluido perfetto $l = 0$, ma il fluido cosmologico in realtà non è

esattamente un fluido perfetto (anche se ci si avvicina), quindi $l(t)$ sarà, si molto piccolo, ma non nullo. Questo rende possibile lo smorzamento dell'ampiezza delle perturbazioni (dissipazione) nel tempo grazie alla diffusione dei fotoni. Abbiamo comunque a che fare con moti random, lo spostamento medio delle particelle è quindi nullo ma non lo è lo spostamento quadratico medio. Gli spostamenti avvengono infatti per collisioni successive, hanno dunque un comportamento completamente casuale.

Se il libero cammino medio è $l(t)$, in un tempo $d\tau$ avremo un numero di collisioni dato da

$$N_{coll} \propto \frac{dc \tau}{l(t)}$$

che è una lunghezza propria. Passiamo in unità comoventi, la distanza quadratica media è data da

$$\langle dx_{com}^2 \rangle = N_{coll} \left(\frac{l(t)}{a(t)} \right)^2 \propto \frac{cl^2(t) d\tau}{l(t)a^2(t)} \propto c \frac{l}{a^2} d\tau$$

Per avere lo spostamento totale al tempo t devo integrare nel tempo:

$$x_{com}^2(t) = \int_0^t \frac{cl d\tau}{a^2} \propto c \int_0^t a d\tau \quad (9.27)$$

RAD	a_{eq}	MAT
$a \propto t^{1/2}$	—	$a \propto t^{2/3}$
$t \propto a^2$	—	$t \propto a^2$
$dt \propto a^2 da$	—	$dt \propto a^{1/2} da$

Tabella 9.1: Conversioni tra a e t , per le due componenti dominanti prima e dopo l'equivalenza, rispettivamente.

calcoliamo quindi l'integrale prima e dopo l'equivalenza (cambiando cronometro):

- $a < a_{eq}$

$$x_{com}^2(t) \propto \int_0^a a'^2 da \propto a^3$$

$$x_{com} \propto a^{3/2}$$

- $a > a_{eq}$

$$x_{com}^2(t) \propto \int_0^a a'^{3/2} da \propto a^{5/2}$$

$$x_{com} \propto a^{5/4}$$

La scala fisica corrispondente è detta **scala di Silk**,

$$x_S := a(t)x_{com} \quad (9.28)$$

a cui corrisponde la **massa di Silk**

$$x_S := x_S^3 \rho_B \quad (9.29)$$

Perciò nei due regimi avremo gli andamenti riportati in Tabella 9.2

	$a < a_{eq}$	$a > a_{eq}$
x_S	$\propto a^{5/2}$	$\propto a^{9/4}$
M_S	$\propto a^{9/2}$	$\propto a^{15/4}$

Tabella 9.2: *Andamenti delle scale di Silk prima e dopo l'equivalenza.*

In Figura 9.4 il riassunto degli andamenti della massa di Silk, confrontati con quelli della massa di Jeans. Vediamo quì che la massa di Silk cresce fino al disaccoppiamento, ovvero fino a quando radiazione e barioni smettono di fare scattering e il libero cammino medio dei fotoni diventa infinito. Il valore massimo della massa di Silk viene raggiunto all'epoca del disaccoppiamento e vale circa $M_{S,max} = M_S(a_{dec}) \approx 10^{12} M_\odot$. Stessa cosa avviene per la massa di Jeans, come abbiamo visto, per la quale il valore massimo è di $10^{16} M_\odot$, molto maggiore della massa di Silk. A differenza di quanto succede per le perturbazioni di DM, per i barioni i destini possono essere più di due. Il range di masse che separa M_S e M_J è molto ampio infatti $M_{S,max} \ll M_{J,max}$, ci sono quindi 3 situazioni possibili:

- perturbazioni di masse maggiori della massa di Jeans crescono sempre;
- se la massa di una perturbazione è compresa tra M_S ed M_J essa cresce un po, poi oscilla ma non si cancella;
- per ogni massa minore della massa di Silk al disaccoppiamento ci sarà un breve periodo di crescita, seguito da oscillazioni e infine completa cancellazione.

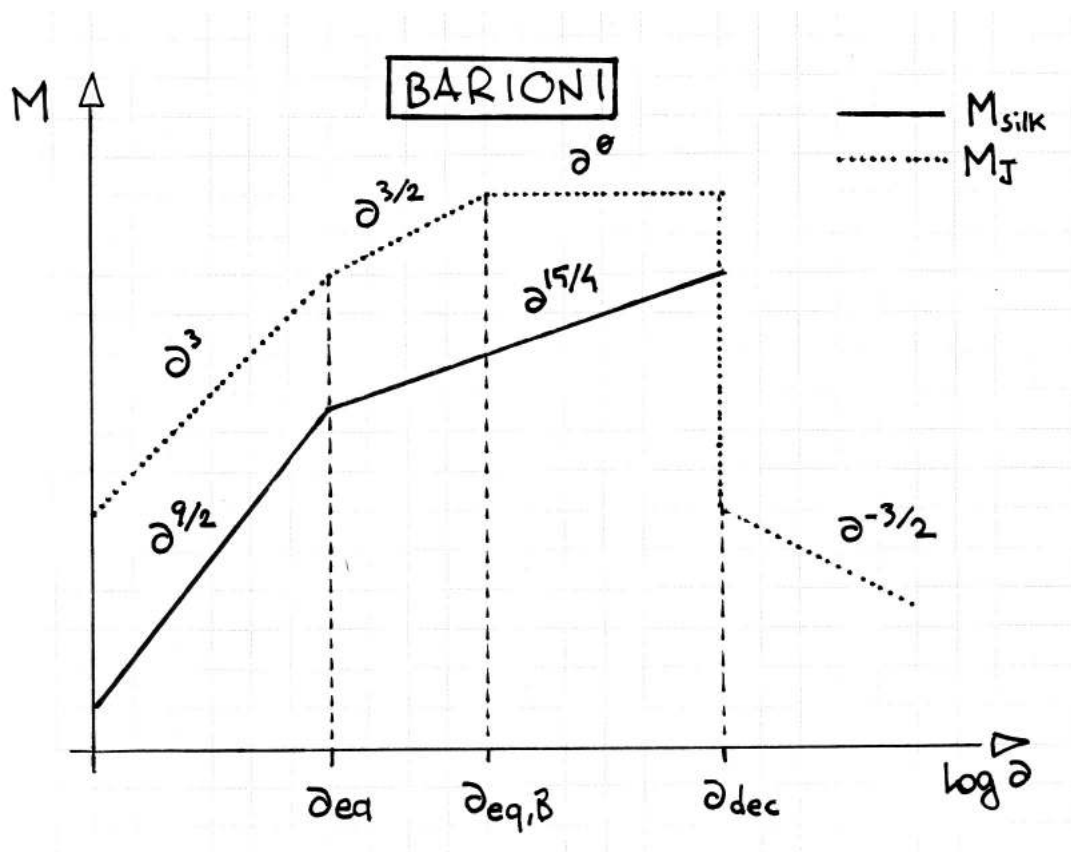


Figura 9.4: Grafico che mostra gli andamenti della massa di Silk della materia barionica a cavallo di varie epoche cosmologiche a confronto con la massa di Jeans.

Capitolo 10

Teoria delle Perturbazioni

Abbiamo delineato un quadro completo della crescita delle oscillazioni. Si pensa che i seed delle perturbazioni di densità

$$\delta = \frac{\delta\rho}{\rho}$$

siano prodotti durante al termine del periodo inflazionario. Nelle fasi finali di oscillazione dell'era dell'inflazione vengono generate tali fluttuazioni con una distribuzione che, nello spazio di Fourier, è **stocastica** e **quasi gaussiana**.

Quando ho delle fasi casuali nello spazio di Fourier il campo $P(\delta)$ (probabilità di avere una fluttuazione δ) cresce spontaneamente come gaussiano, grazie alle proprietà di omogeneità ed isotropia dell'Universo. La sonda Planck ha misurato che le deviazioni da una gaussiana delle anisotropie della CMB è trascurabile.

Per avere una buona statistica però avremmo bisogno di un campione sufficientemente grande (vorremmo osservare il fenomeno tante volte) e vorremmo che fosse riproducibile. Non è per niente il caso del nostro Universo, per il quale il campione è composto da un solo elemento e non siamo molto sulla strada per riuscire a riprodurre l'esperimento.

δ è una funzione della posizione

$$\delta(\mathbf{x}) := \frac{\rho(\mathbf{x} - \rho_B)}{\rho_B} \quad (10.1)$$

Se misurassimo il valore di δ in posizioni diverse dell'Universo avremmo che, la probabilità $P(\delta)$ di avere una perturbazione di valore δ in un dato punto è una distribuzione gaussiana. Essendo gaussiana è definita da due quantità, la media, $\langle \delta(\mathbf{x}) \rangle$, e la varianza, $\langle \delta^2(\mathbf{x}) \rangle$. Essendo però la media di una fluttuazione nulla per definizione, l'unico valore che ci definisce il campo di δ è la **varianza**¹.

Per risolvere il problema della bassa statistica (a.k.a. “abbiamo un solo Universo come facciamo a vedere come si comportano gli Universi in media?”) introduciamo la

Ipotesi Ergodica: *la media tra più volumi equivale alla media spaziale tra sottovolumi sufficientemente grandi e non sovrapposti di un unico volume.*

Con questa ipotesi stiamo dicendo che, grazie alle sue caratteristiche di uniformità ed omogeneità, posso considerare il nostro Universo come se fosse “un insieme di tanti universi”. L'ipotesi si basa sul fatto che regioni sufficientemente grandi di Universo, sufficientemente separate, sono tra loro statisticamente indipendenti e sono perciò equivalenti a realizzazioni

¹I cosmologi hanno la brutta abitudine di chiamare la varianza e la sua radice alla stessa maniera: varianza

statistiche diverse dello stesso processo stocastico. In tale accezione, l'ipotesi ergodica unita al Principio Cosmologico, prende il nome di **ipotesi Fair Sample**.

Alcune osservazioni:

- l'unico campo utile alla trattazione è il campo gravitazionale;
- nel caso di distribuzione gaussiana, l'ipotesi ergodica diventa un teorema dimostrabile: "la media su tante realizzazioni è uguale alla media fatta su volumi sufficientemente grandi da poter essere considerati indipendenti l'uno dall'altro";
- l'approccio probabilistico non predice la formazione di una precisa struttura ma, piuttosto, fornisce la probabilità che avvenga la realizzazione di strutture simili;
- le dimensioni dei volumi indipendenti da considerare elementi separati del campione varia nel tempo. Il processo di aggregazione gravitazionale porta alla crescita delle disomogeneità nel tempo che porta alla necessità di prendere volumi sempre più grandi. Oggi omogeneità ed isotropia possono essere trovate su scale superiori ai $500 \div 600 \text{ Mpc}$.

Abbiamo già detto che il campo $\delta(\mathbf{x})$ ha una distribuzione di probabilità gaussiana, per come è definito però tale gaussiana non potrà estendersi su tutto lo spazio (i.e. da $-\infty$ a $+\infty$), infatti il valore minimo che pu'ò avere la densità è zero e quindi

$$\delta_{min} = \frac{\rho_{min} - \bar{\rho}}{\bar{\rho}} = -\frac{\bar{\rho}}{\bar{\rho}} = -1$$

e quindi dovrà per forza essere $-1 < \delta < +\infty$ e la gaussiana è troncata.

Gli approcci con cui si può affrontare un'analisi statistica sono fondamentalmente due, o consideriamo il campo delle fluttuazioni $\delta(\mathbf{x})$ nello spazio reale, oppure consideriamo il suo trasformato nello spazio di Fourier, $\delta(\mathbf{k})$. Trasformando con Fourier,

$$\delta(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \delta(\mathbf{k}) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) d^3\mathbf{k}$$

,

o antitrasformando,

$$\delta(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \delta(\mathbf{x}) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) d^3\mathbf{x}$$

,

possiamo passare agilmente da uno spazio all'altro. Ragionando dimensionalmente, $\delta(\mathbf{x})$ deve essere una quantità adimensionale ma, poiché $[\mathbf{k}] = [\frac{2\pi}{\lambda}] = [L^{-1}]$ allora $[d^3\mathbf{k}] = [L^{-3}]$ da cui quindi $\delta(\mathbf{k})$ dovrà avere le dimensioni di un volume, $[L^3]$.

Prima di procedere diamo la definizione di **delta di Dirac**, che ci verrà utile più avanti,

$$\delta_D^{(3)}(\mathbf{k}) := \frac{1}{2\pi} \int \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) d^3\mathbf{x} \quad (10.2)$$

che ha anch'essa, dimensioni del cubo di una lunghezza. Se ne può dare anche una definizione operativa, più utile per fini pratici:

$$\int f(\mathbf{k}) \delta_D^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{k}) d^3\mathbf{k} = f(\mathbf{x}) \quad (10.3)$$

10.1 Funzione di Correlazione

In meccanica statistica, la **funzione di correlazione** è una misura del livello di ordine di un sistema che descrive come sono collegate le variabili microscopiche in punti diversi del sistema. In particolare, la funzione di correlazione misura come le fluttuazioni δ co-variano l'una con l'altra in media lungo lo spazio-tempo. Tale funzione è definita come segue:

$$\xi(r) := \langle \delta(\mathbf{x})\delta(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle$$

,
è la media del prodotto tra due valori del campo delle fluttuazioni, presi in due punti che distano r l'uno dall'altro². In questo caso $\xi(r)$ è detta **funzione di correlazione a due punti**.

Scriviamola ora come trasformata di Fourier

$$\xi(r) = \frac{1}{(2\pi)^6} \int d^3\mathbf{k} \int d^3\mathbf{k}' \langle \delta(\mathbf{k})\delta(\mathbf{k}') \rangle e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}+\mathbf{r})} e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}} \quad (10.4)$$

della funzione definita

$$\langle \delta(\mathbf{k})\delta(\mathbf{k}') \rangle := (2\pi)^3 P(k) \delta_D^{(3)}(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \quad (10.5)$$

dove il fattore $P(k)$ è detto **spettro di potenza**. Allora sostituendo la (10.5) nella (10.4) otteniamo

$$\xi(r) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k} \int d^3\mathbf{k}' P(k) \delta_D^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}+\mathbf{r})} e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}}$$

e, poiché $\delta_D^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \neq 0 \iff \mathbf{k} = -\mathbf{k}'$, integrando in $d^3\mathbf{k}'$ otteniamo

$$\xi(r) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k} P(k) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad (10.6)$$

La (10.6) esprime il **teorema di Wiener-Khinchin**: lo spettro di potenza $P(k)$ è l'equivalente nello spazio di Fourier (i.e. la trasformata di Fourier) della funzione di correlazione nello spazio reale. Viceversa la funzione di correlazione è l'antitrasformata di Fourier dello spettro di potenza. Quindi parlare di una o dell'altra funzione è esattamente equivalente. Si può dimostrare facilmente dalla (10.4) che lo spettro di potenza $P(k)$ ha dimensione $[L^3]$ mentre la funzione di correlazione $\xi(r)$ è adimensionale. Il campo di densità $\delta(\mathbf{x})$ è una quantità reale mentre, trasformando con Fourier, $\delta(\mathbf{k})$ è immaginario. Un teorema³ però ci dice che $\delta^*(k) = \delta(-k)$, e quindi, nonostante la definizione formale dello spettro di potenza si scriverebbe a rigore

$$\langle \delta(\mathbf{k})\delta^*(\mathbf{k}') \rangle := (2\pi)^3 P(k) \delta_D^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad (10.7)$$

questa è equivalente a scriverla nella forma (10.5).

Come dicevamo, parlare di $P(k)$ nello spazio di Fourier o parlare di $\xi(r)$ nello spazio reale, è formalmente equivalente, poiché entrambe descrivono la stessa proprietà in due spazi diversi. Non a caso si parla di "spettro", infatti lo spettro di potenza è analogo, ad esempio, allo spettro della radiazione elettromagnetica, avremo

²se non si fosse capito, quando scriviamo $\mathbf{r}$ intendiamo un vettore, e quando scriviamo r , intendiamo il suo modulo...mo' scrivo al plurale pure sulle note, meh

³Non meglio specificato e non mi va di cercarlo..

$$P(k) \propto \langle \delta(\mathbf{k})\delta(\mathbf{k}') \rangle \propto \langle \delta^2(\mathbf{k}) \rangle$$

Lo spettro $P(k)$ ci dice quale sia la misura quadratica media, a meno di un fattore di normalizzazione, dell'ampiezza di un'onda che ha vettore d'onda $\mathbf{k}$, dove per misura quadratica media intendiamo la varianza poiché infatti la media delle fluttuazioni vera e propria è nulla per definizione. Equivalentemente si può dire che $P(k)$ è una misura della potenza delle fluttuazioni di scala k , dove k è il numero d'onda delle onde piane di lunghezza d'onda $\lambda = 2\pi/k$. Volendo essere rigorosi si dovrebbe dire che $P(k)$ è una **densità di potenza**, in quanto la vera e propria **potenza delle fluttuazioni** deve essere adimensionale e si ottiene infatti moltiplicando per l'elemento di volume: $P(k) d^3\mathbf{k}$.

Abbiamo già visto in teoria lineare che, dal punto di vista teorico, si preferisce studiare il comportamento delle ampiezze, $\delta(\mathbf{k})$, delle onde, l'evoluzione delle perturbazioni avviene infatti in maniera completamente indipendente dalla posizione e, nello spazio di Fourier, indipendente da $\mathbf{k}$ grazie all'isotropia dello spazio.

Essendo interessati allora alla sola distanza tra i punti possiamo tranquillamente passare in coordinate sferiche, vediamo come cambia la notazione:

$$\begin{cases} k_i = k \sin \theta_k \cos \phi_k \\ k_j = k \sin \theta_k \sin \phi_k \\ k_k = k \cos \theta_k \end{cases} \quad (10.8)$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = k r \cos \theta_k \Rightarrow \exp(i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) = \exp(ikr \cos \theta_k) \quad (10.9)$$

$$\int d^3\mathbf{k} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta_k \sin \theta_k \int_0^{+\infty} k^2 dk \quad (10.10)$$

Possiamo allora riscrivere l'integrale (10.6) in coordinate sferiche

$$\xi(r) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{+\infty} k^2 P(k) dk \int_0^\pi \sin \theta_k e^{ikr \cos \theta_k} d\theta_k$$

Poniamo ora $ikr \cos \theta_k =: y$ da cui $dy = -ikr \sin \theta_k d\theta_k$:

$$\xi(r) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{+\infty} k^2 P(k) dk \int_{-ikr}^{+ikr} \frac{e^y dy}{i k r}$$

per l'isotropia abbiamo che $\int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi$, e quindi integrando anche in dy abbiamo

$$\xi(r) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{+\infty} \frac{k^2 P(k)}{i k r} [\exp i k r - \exp -i k r] dk$$

La formula di Eulero ci dice che $\exp(ix) = \cos x - i \sin x$, da cui il termine nella quadra diventa $2i \sin(kr)$

$$\begin{aligned} \xi(r) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{+\infty} k^2 P(k) \frac{2i \sin(kr)}{i k r} dk \\ \xi(r) &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{+\infty} k^2 P(k) \frac{\sin(kr)}{k r} dk \end{aligned} \quad (10.11)$$

che rappresenta la versione scalare della (10.6), dipendente esclusivamente dai moduli di $\mathbf{r}$ e $\mathbf{k}$, grazie all'integrazione su tutta la parte angolare.

Consideriamo ora la definizione di delta di Dirac (10.2) per $k = k'$

$$\delta_D^{(3)}(0) := \frac{1}{2\pi} \int \exp 0 \, d^3\mathbf{x} = \frac{V_\infty}{(2\pi)^3}$$

dove V_∞ rappresenta il “volume su tutto lo spazio”, per noi il **volume dell'Universo**, ne consegue che la (10.7) diventa:

$$\langle \delta(\mathbf{k})\delta^*(\mathbf{k}') \rangle = \langle |\delta(\mathbf{k})|^2 \rangle = (2\pi)^3 P(k) \delta_D^{(3)}(0) = P(k) V_\infty \quad (10.12)$$

e ritroviamo formalmente quanto avevamo accennato, ovvero che lo spettro di potenza $P(k)$ è uguale al valore quadratico medio delle ampiezze delle fluttuazioni nello spazio di Fourier, $\delta(\mathbf{k})$, a meno di un fattore di normalizzazione, che non è quindi nient'altro che il volume dell'Universo.

Prima di procedere forniamo dei risultati che verranno utili.

10.1.1 Teorema di Parseval

Mettiamoci in 1D e consideriamo due funzioni qualunque a valori complessi, f e g , abbiamo che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g^*(x) \, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \, dk' \hat{f}(k) \hat{g}^*(k') \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, e^{ix(k-k')}$$

Poiché $\delta_D^{(1)}(k - k') := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp ix(k - k') \, dx$ abbiamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g^*(x) \, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \hat{f}(k) \int_{-\infty}^{+\infty} dk' \hat{g}^*(k') \delta_D^{(1)}(k - k')$$

da cui

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g^*(x) \, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k) \hat{g}^*(k) \, dk \quad (10.13)$$

ovvero l'integrale del prodotto di una funzione a valori complessi e la coniugata di un'altra funzione a valori complessi, è uguale all'integrale delle loro trasformate di Fourier esteso a tutto lo spazio dei numeri d'onda. Estendendo il risultato allo spazio 3D otteniamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{x})g^*(\mathbf{x}) \, d^3\mathbf{x} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\mathbf{k}) \hat{g}^*(\mathbf{k}) \, d^3\mathbf{k} \quad (10.14)$$

La (10.13) e la (10.14) esprimono il **Teorema di Parseval** in una e tre dimensioni, rispettivamente.

10.1.2 Varianza del Campo Puntuale

La varianza di un campo gaussiano 3D è definita come il valore quadratico medio del campo stesso. Nel caso del campo di densità reale $\delta(\mathbf{x})$, la varianza è data dalla

$$\sigma^2 = \langle |\delta(\mathbf{k})|^2 \rangle \equiv \langle \delta^2(\mathbf{k}) \rangle$$

Applicando l'ipotesi ergodica, possiamo dividere l'Universo in un gran numero di volumi V_∞ considerabili indipendenti e calcolare la varianza σ^2 come media spaziale quadratica di δ entro ciascun volume mediata su tutti i volumi. Avremo così una doppia media che possiamo scrivere

$$\sigma^2 = \frac{1}{V_\infty} \int d^3\mathbf{x} < \delta^2(\mathbf{k}) >$$

alla quale applichiamo il teorema di Parseval 3D con $f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x})$:

$$\sigma^2 = \frac{1}{V_\infty} \int d^3\mathbf{x} < \delta(\mathbf{k})\delta^*(\mathbf{k}) > = \frac{1}{(2\pi)^3 V_\infty} d^3\mathbf{k} \int_{-\infty}^{+\infty} < \hat{\delta}(\mathbf{k})\hat{\delta}^*(\mathbf{k}) >$$

che, per la (10.12) diventa

$$\sigma^2 = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} P(k) d^3\mathbf{k} \quad (10.15)$$

La varianza è quindi l'integrale dello spettro di potenza su tutto lo spazio di Fourier, a meno di un fattore $1/(2\pi)^3$. Abbiamo quindi che la varianza è un'informazione integrale sullo spettro di potenza. Passando in coordinate sferiche ed integrando sugli angoli la (10.15) si riscrive

$$\sigma^2 = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{+\infty} k^2 P(k) dk \quad (10.16)$$

dalla quale è ancora più evidente che la varianza σ^2 delle fluttuazioni di densità $\delta(\mathbf{x})$ è l'integrale dello spettro di potenza $P(k)$ moltiplicato per k^2 ed esteso a tutte le possibili scale k . Questa varianza è detta **varianza del campo puntuale**.

10.1.3 Convoluzione

L'operazione di convoluzione, $\otimes$, tra due funzioni f e g è definita come l'integrale

$$C[f, g] = f(\mathbf{x}) \otimes g(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{x})g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d^3\mathbf{y}$$

Valgono le seguenti

- **proprietà commutativa:**

$$f(\mathbf{x}) \otimes g(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) \otimes f(\mathbf{x})$$

- **teorema della convoluzione:** se definiamo $h(\mathbf{x}) := f(\mathbf{x}) \otimes g(\mathbf{x})$ allora

$$\hat{h}(\mathbf{x}) = \hat{f}(\mathbf{k}) \cdot \hat{g}(\mathbf{k})$$

ovvero convolvere due funzioni nello spazio reale equivale al moltiplicarle nello spazio di Fourier.

Si può vedere l'operazione di convoluzione come un "filtraggio" di una funzione rumorosa (in cui sono presenti fluttuazioni), f , attraverso una funzione filtro, g .

10.1.4 Varianza di Massa

Misurare il campo di densità dell'Universo non è banale. È possibile ad esempio misurare la distribuzione di massa in un ammasso di galassie sfruttando il lensing gravitazionale ma, agendo in questo modo, riusciremmo ad avere informazioni sulle regioni sovraddense che emettono radiazione. L'idea sarebbe quindi quella di effettuare un conteggio delle galassie e misurare qual'è la deviazione dal numero medio di oggetti che riempiono un determinato volume di Universo. Agendo in questo modo però andiamo incontro a delle incertezze, infatti nell'Universo sono presenti dei vuoti e non sappiamo se essi siano riempiti di massa che non emette e in tal caso in che misura. A questo va aggiunto che la densità è una funzione continua, definita puntualmente dalla relazione $d\rho = m dr^3$, non si può dire altrettanto per la distribuzione delle galassie nell'Universo.

Definiamo allora

$$\delta_g := \frac{N_g(V) - \bar{N}_g(V)}{\bar{N}_g(V)} \quad (10.17)$$

che ci dà le fluttuazioni sul numero medio di galassie all'interno di un determinato volume, perdendo così l'informazione puntuale che avevamo con δ . Poiché vogliamo però un'informazione che parli della massa, supponiamo per semplicità di avere una distribuzione di galassie tutte uguali e riscriviamo la definizione (10.17) come

$$\delta_g := \frac{N_g(V) - \bar{N}_g(V)}{\bar{N}_g(V)} \propto \frac{M_g(V) - \bar{M}_g(V)}{\bar{M}_g(V)}$$

dove il $\propto$ è dovuto al fatto che niente ci assicura che le galassie siano dei traccianti perfetti della distribuzione di materia. Correggiamo quindi per un **parametro di bias**, b , da cui

$$\delta_g := \frac{N_g(V) - \bar{N}_g(V)}{\bar{N}_g(V)} = b \frac{M_g(V) - \bar{M}_g(V)}{\bar{M}_g(V)} = b\delta_M \quad (10.18)$$

Nel parametro di bias b è contenuta la nostra ignoranza sui processi di formazione delle galassie, nonché la peculiarità dei diversi oggetti che utilizziamo come traccianti. A proposito di questo secondo punto, per “peculiarità dei traccianti” si intende l'incertezza sulla distribuzione della materia oscura in rapporto ai diversi oggetti, ovvero, l'ignoranza sulla percentuale di materia oscura associata ad ogni particolare oggetto. Prendendo il parametro b costante, si suppone che esista una relazione lineare tra numero di galassie e massa totale in un volume, è quindi un'approssimazione al primo ordine.

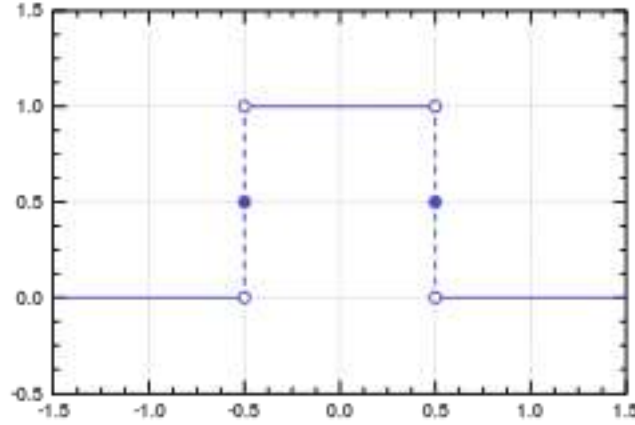
Possiamo passare da δ_M a δ effettuando una convoluzione filtrando con una opportuna “funzione finestra”. Come filtro si potrebbe scegliere anche una funzione gaussiana definita da una varianza σ ma solitamente si preferisce utilizzare un filtro di tipo **Top-Hat**, definito come la funzione W costante entro una sfera di raggio R e che vale 0 all'esterno. Tale funzione è definita

$$W(\mathbf{x}, R_{TH}) = \frac{3}{4\pi R_{TH}^3} \theta\left(1 - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{R_{TH}}\right)$$

dove $\theta\left(1 - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{R_{TH}}\right)$ è una funzione come quella riportata in Figura 10.1.

Allora avremo che δ_M e δ sono quindi legati dalla

$$\delta_M(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x}) \otimes W(\mathbf{x}, R)$$

Figura 10.1: *Filtro top-hat.*

ovvero perdiamo tutta l'informazione su scale al di sotto del raggio R , il filtro top-hat è infatti un filtro passa basso.

Anche δ_M avrà una distribuzione gaussiana descritta dalla sola varianza, poiché misura di fluttuazioni quindi a media nulla. Per determinare quindi la forma di tale gaussiana definiamo la **varianza di massa** (analogamente alla varianza puntuale definita per δ):

$$\sigma_M^2 := \langle \delta_M^2 \rangle = \left\langle \left(\frac{\delta M}{M} \right)^2 \right\rangle \quad (10.19)$$

dove abbiamo tralasciato il fattore di bias. Applichiamo allora il teorema di Parseval 3D:

$$\left\langle \left(\frac{\delta M}{M} \right)^2 \right\rangle = \frac{1}{V_\infty} \int d^3\mathbf{x} \langle \delta_M^2(\mathbf{x}) \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3 V_\infty} \int d^3\mathbf{k} \langle \hat{\delta}_M^2(\mathbf{k}) \rangle$$

che per il teorema della convoluzione e per la (10.12) ci da

$$\sigma_M^2 = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k} \langle P(k) \rangle \hat{W}^2(\mathbf{k}, R) \quad (10.20)$$

che è la **varianza di massa** cercata, simile alla varianza puntuale ma filtrata da W per valori diversi di $\mathbf{k}$. La varianza di massa varia con il raggio su cui filtriemo e abbiamo le seguenti:

$$\begin{cases} \sigma_M^2 \rightarrow \sigma^2 & \text{per } R \rightarrow 0 \\ \sigma_M^2 \rightarrow 0 & \text{per } R \rightarrow \infty \end{cases}$$

ovvero, più è piccolo il filtro più ci avviciniamo al valore della varianza puntuale quindi ad una distribuzione che ricalca quella della densità, più è grande più la varianza di massa diventa piccola, rappresentando così una gaussiana degenerata una delta di Dirac, come se la massa dell'Universo fosse tutta concentrata in un punto.

10.2 Spettro di Potenza e Relazioni di Scala

Abbiamo visto come la funzione di correlazione $\xi(r)$, la varianza puntuale σ^2 e la varianza di massa σ_M^2 , siano tutte quantità legate allo spettro di potenza.

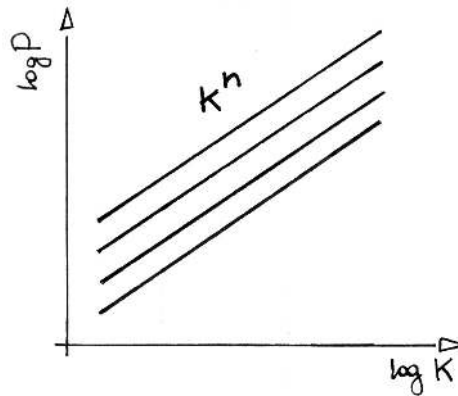


Figura 10.2: *Spettro di potenza a legge di potenza (lol).*

Abbiamo inoltre parlato del fatto che sono le fasi finali di oscillazione dell'inflatone, in uscita dalla fase inflazionaria a determinare la formazione di fluttuazioni nel campo di densità. Dunque lo spettro iniziale di tali fluttuazioni deve essere quello imposto dall'inflazione. Al momento dell'inflazione non esistono scale privilegiate, una forma funzionale che rispetta questa proprietà è la legge di potenza, dunque possiamo assumere che lo spettro $P(k)$ abbia una forma

$$P(k) = Ak^n \quad (10.21)$$

con n indice spettrale e A l'ampiezza. Ci attendiamo delle rette con pendenza fissa (in un grafico logaritmico come in Figura 10.2), cioè tutte le scale sono identiche.

Quindi la scelta di una legge di potenza per lo spettro $P(k)$ primordiale è corroborata dai modelli inflazionari, questi però non impongono nessun vincolo sulle ampiezze A che andranno quindi calibrate studiando, ad esempio, la CMB.

Abbiamo visto che fluttuazioni del campo di densità che si formano con un'ampiezza primordiale $\delta_i = \delta(\mathbf{x}, t_i)$ all'istante t_i , ad un tempo successivo $t > t_i$ sono cresciute seguendo l'andamento dato dalla soluzione crescente della relazione di dispersione, e quindi $\delta(t) = \delta_i \delta_+(t)$, tale soluzione è funzione del tempo, non porta con sé quindi alcuna dipendenza dalla scala. Questo è sempre vero a patto che ci mettiamo su scale sufficientemente più grandi della scala di Jeans ($\lambda \gg \lambda_J$, l'unica interazione è quella gravitazionale), altrimenti non avremmo crescita⁴, se questo è vero allora tutte le perturbazioni crescono alla stessa maniera su tutte le scale possibili. Supponiamo allora di avere uno spettro iniziale $P(k, t_i) = P_i = \delta_i^2$ come quello della (10.21), in un qualsiasi istante $t > t_i$, lo spettro sarà

$$P(\mathbf{k}, t) = \delta^2(\mathbf{x}, t) = \delta_i^2 \delta_+^2(t) = P_i \delta_+^2(t)$$

Abbiamo detto che si utilizzano filtri passa-basso per ottenere la varianza di massa, ovvero filtri che consentono il passaggio esclusivamente delle scale k al di sotto di un determinato valore, da cui

$$\sigma_M^2 \propto \int_0^{k_{max}} d^3\mathbf{k} P(k)$$

⁴Su scale minori non potremmo usare δ_+ per descrivere l'evoluzione delle perturbazioni, poiché non avremmo esclusivamente dipendenza dal tempo e varrebbero altre soluzioni per la relazione di dispersione, si rimanda alla Sezione 8.1.1

ma un limite superiore nello spazio di Fourier significa un limite inferiore nello spazio reale, quindi questa relazione ci dice che la varianza di massa tiene conto solo di fluttuazioni con una massa superiore ad un determinato valore.

Fatte queste premesse possiamo calcolare come si evolve la varianza in massa dello spettro di potenza nel tempo (la dipendenza dal tempo è contenuta in $P(k)$), partiamo dalla definizione (10.20):

$$\sigma_M^2 = \int_0^\infty d^2\mathbf{k} P(k) \hat{W}(\mathbf{k}, R) \propto \delta_+^2(t) \int d^3\mathbf{k} k^n$$

$$\sigma_M^2 \propto \delta_+^2(t) k^{3+n} \quad (10.22)$$

dove la dipendenza dal tempo è contenuta in $\delta_+^2(t)$ e quella dallo spazio in k^{3+n} ; ricordiamo che, essendo δ_+ un risultato della teoria lineare di Jeans, la dipendenza dal tempo della varianza di massa è anche lineare. Ad esempio per un Universo EdS

$$\delta_+ \propto a \propto t^{2/3} \propto (1+z)^{-1}$$

Poiché però le strutture formate non sono lineari ci chiediamo quando il regime di evoluzione delle perturbazioni diventa non lineare. Perché questo succeda dovrà essere $\delta \approx 1$ (quando la teoria lineare assumeva $\delta \ll 1$). Alternativamente potremmo ragionare in termini di varianza di massa che, poiché $\sigma_M \propto \delta^2 \approx 1$, dovrà essere dell'ordine dell'unità anch'essa perché ci sia deviazione dal regime lineare.

Questo risultato ci dice, ad esempio, quando una perturbazione su una scala M diventa non lineare. Poniamo quindi la (10.22) uguale ad uno:

$$\sigma_M^2 \propto \delta_+^2(t) k^{3+n} = 1$$

che, poiché $k \propto 1/R$ e $M \propto R^3$, possiamo tradurre in termini di massa

$$\sigma_M^2 \propto \delta_+^2(t) R^{-(3+n)} \propto \delta_+^2(t) M^{-\frac{3+n}{3}} = 1$$

Questa relazione ci dice che, quando la quantità $\delta_+^2(t) M^{-\frac{3+n}{3}}$ diventa uguale all'unità, la M entra in regime non lineare (notiamo che c'è dipendenza dal tempo), ovvero ci dice quando quella determinata massa si forma. Chiamiamo allora M_*

$$M_* := [\delta_+(t)]^{6/(3+n)} \quad (10.23)$$

la massa che può formarsi ad un certo tempo t . Quindi, a seconda dell'indice n , abbiamo che la tempistica con cui si formano le masse delle strutture varia; in particolare la funzione può essere crescente o decrescente con il tempo, ovvero si possono creare masse sempre più grandi o viceversa, a seconda del particolare valore di n .

Possiamo allora chiederci quale sia il tempo tipico, necessario alla formazione di un oggetto di determinata massa. Nel caso EdS abbiamo che $\delta_+ \propto a \propto t^{2/3} \propto (1+z)^{-1}$, allora troviamo

$$M_{*,EdS} \propto a^{6/(3+n)} \propto (1+z)^{-6/(3+n)}$$

$$t_{*,EdS} \propto t \propto a^{3/2} \propto M^{(3+n)/4}$$

La densità media dell'oggetto che si forma scala con la densità media dell'Universo, quindi

$$\rho_* \propto \rho_b(t) \propto a^{-3} \propto (1+z)^3 \quad (10.24)$$

Con questo risultato possiamo definire la dimensione tipiche che hanno gli oggetti che si formano ad un certo tempo

$$R_* \propto \left(\frac{M_*}{\rho_*} \right)^{1/3} \propto M_*^{1/3} (1+z)^{-1} \quad (10.25)$$

Possiamo inoltre calcolare la dispersione di velocità degli oggetti che si formano, che ci da una misura della temperatura a cui virializzano:

$$\langle v^2 \rangle \propto k_B T_{vir} \propto \frac{GM_*}{R_*} \propto M_*^{2/3} \rho_*^{1/3} \propto M_*^{2/3} (1+z) \propto M_*^{(1-n)/6} \quad (10.26)$$

Le relazioni (10.23), (10.24), (10.25) e (10.26) sono le cosiddette **relazioni di scala non lineari** tra gli osservabili delle strutture formate, valide quando la gravità è l'unica forza ad aver influenzato la loro formazione. Esistono quindi delle relazioni fisse che vanno come leggi di potenza ben precise, tra grandezze caratteristiche delle prime strutture che si formano. Esse dipendono tutte dall'indice spettrale n .

È grazie a queste relazioni che possiamo sperare, ad esempio, che temperatura in banda X di un ammasso sia un tracciante della sua massa, o che lo sia la dispersione di velocità degli oggetti che lo compongono. Di nuovo, se e solo se tali proprietà dipendono esclusivamente dall'azione del campo gravitazionale.

Osservativamente ci aspettiamo di vedere delle relazioni di scala che leghino la massa, che è la quantità che vorremmo avere, e altre quantità osservabili.

A questo punto vale la pena chiedersi quali siano le strutture che prima si formano nell'Universo, se quelle di scala più piccola o viceversa. La soluzione a questo problema dipende dall'indice spettrale n e giace nella (10.23). Abbiamo che se $n > -3$ allora $6/(3+n) < 0$ e quindi la massa sarà funzione decrescente del redshift e crescente del tempo, questo significa che gli oggetti più piccoli si formano prima. Questo è quello che si chiama **clustering gerarchico** ed è ciò a cui accennavamo in Sezione 9.2 relativamente allo scenario di formazione delle strutture nel caso la componente dominante della materia oscura fosse fredda. Perché si possa parlare di formazione gerarchica anche l'energetica coinvolta deve crescere con la massa, questo ce lo aspettiamo ad esempio perché sappiamo che quando due oggetti fanno merging per formarne uno più grande, l'energetica totale del sistema risultante è data dalla somma di quelle dei sistemi di partenza. In ogni caso comunque l'energia totale del sistema finale è maggiore di quelle dei due sistemi di partenza presi separatamente. L'informazione energetica in queste relazioni è contenuta nella (10.26), sappiamo infatti che la dispersione di velocità è una misura dell'energia cinetica del sistema. Perché $\langle v^2 \rangle$ cresca dovrà essere $1-n > 0 \Rightarrow n < 1$. Quindi avremo clustering gerarchico se e solo se entrambe le condizioni sono verificate, ovvero quando $-3 < n < 1$ (approfondiremo più avanti).

10.3 Perturbazioni e Orizzonte Cosmologico

Torniamo ora a parlare di inflazione. Come si è detto questo processo non ha una scala privilegiata, ci aspettiamo quindi che le perturbazioni nascano seguendo una legge di potenza e che quindi il campo di densità primordiale segua uno spettro del tipo (10.21). In realtà l'inflazione è molto democratica: alla fine del periodo oscillatorio di uscita dall'inflazione infatti si formano delle fluttuazioni nella metrica (e quindi nel campo gravitazionale) e non nel

campo di densità. Ciò significa che in realtà il prodotto della fase oscillatoria (Sezione 6.2.3) sono delle perturbazioni nel campo del potenziale gravitazionale.

Vogliamo ora calcolarci come sono legate tali fluttuazioni del campo gravitazionale all'indice spettrale n . Per farlo vedremo come varia una fluttuazione $\delta\phi$ ad una scala R fissata, vale

$$\delta\phi_R \propto \frac{G\delta M}{R} \propto \frac{G\delta\rho R^3}{R}$$

poichè $\delta\rho \propto \delta M \propto \sigma_M$ e $M \propto R^3$, sostituendo sopra abbiamo

$$\delta\phi_R \propto \sigma_M M^{2/3}$$

che, con $\sigma_M^2 \propto M^{-\frac{3+n}{3}}$, diventa

$$\delta\phi_R \propto M^{-\frac{3+n}{3}} M^{2/3} \propto M^{-(1-n)/6}$$

Non c'è la stessa dipendenza da n tra le fluttuazioni del campo gravitazionale e quelle del campo di densità (ce lo dice anche l'equazione di Poisson). Questo risultato ci dice come dipendono dalla scala le fluttuazioni del campo gravitazionale rispetto a quelle del campo di densità. Se nell'inflazione vengono prodotte delle fluttuazioni con uno spettro che va come $1 - n$, nel campo di densità vediamo uno spettro che va come n .

Questo è importante perché noi sappiamo che nel potenziale gravitazionale vengono generate delle fluttuazioni come un *rumore bianco*, nel senso che sono tutte **alte uguali**, indipendentemente dalla scala. Ciò significa che l'andamento dovrà essere costante, quindi $1 - n = 0$. Da questo deduciamo che se accettiamo l'inflazione come modello e come momento in cui si generano le fluttuazioni metriche che portano alle perturbazioni nel campo di densità, allora queste vengono prodotte con uno spettro che va come $n = 1$, detto **Spettro di Zel'dovich**⁵.

Le relazioni di scala che si ottengono sostituendo l'indice spettrale di Zel'dovich nelle (10.23)-(10.26) però non sono osservate nella realtà. Le pendenze delle relazioni che osserviamo sono diverse, l'indice spettrale non è consistente con $n = 1$. Questo però non ci stupisce, nella nostra trattazione abbiamo infatti ribadito più volte che la teoria assumeva l'azione della sola gravità. Non è quello che succede agli ammassi di galassie, nei quali gli effetti dovuti all'astrofisica del gas (la gastrofisica, no kidding) non sono trascurabili. Affronteremo meglio questo punto quando parleremo di simulazioni n-body. Se fosse la sola gravità ad agire gli ammassi di galassie si comporterebbero esattamente come gli ammassi globulari, nonostante i 10 ordini di grandezza in massa che separano queste due categorie di oggetti. La gravità, infatti, non ha scale privilegiate, dipende esclusivamente dall'inverso della distanza, come ribadito più volte.

Lo spettro di Zel'dovich dovrebbe avere quindi un andamento come la retta continua in Figura 10.3.

L'Inflazione però, in quanto democratica⁶, non ci dà alcuna informazione sull'altezza (normalizzazione) di tale retta, poiché dalla teoria non abbiamo l'ampiezza attesa per le fluttuazioni iniziali. Quello che predice l'inflazione è che, fintanto che le scale sono sopra la scala di Jeans, le fluttuazioni crescono in modo indipendente da k . Ciò significa che, ad un tempo $t > t_i$, ogni δ_i sarà cresciuta ed avrà un valore $\delta_i\delta_+(t)$, allora (per la solita $P(k, t) \propto \delta^2(k) >$) lo spettro di potenza sarà dato dalla

⁵Come indice spettrale è marginalmente consistente con il range permesso per avere clustering gerarchico.

⁶“L'ho già detto(?)!” (remember vulvia di guzzanti?)

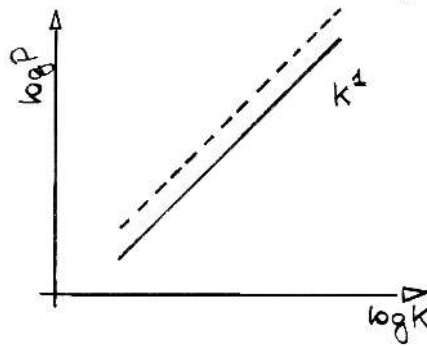


Figura 10.3: Spettro di potenza di Zel'dovic a $t = t_i$ (retta continua) e a $t > t_i$ (retta tratteggiata). [remember: Deve valere $k < k_J$]

$$P(k, t) \propto P_i \delta_+^2(t)$$

Ovvero lo spettro si innalza mantenendo la stessa forma (retta tratteggiata in Figura 10.3).

Abbiamo già parlato, al termine della Sezione 8.6, dell'effetto di stagnazione, ovvero del fenomeno per il quale se una scala entra nell'orizzonte prima dell'equivalenza, la perturbazione tende a rimanere costante e cresce al più di un fattore $5/2$. Ciò significa che la crescita che abbiamo visto non può avvenire indiscriminatamente per tutte le scale, ad un certo punto alcune di queste entreranno nell'orizzonte, subendo quindi l'effetto di stagnazione.

Vogliamo vedere come lo spettro primordiale viene deformato da questo fenomeno. Calcoliamo il tempo in cui una scala entra nell'orizzonte, ricordando che R_H è funzione del tempo:

$$R_H(t) = a(t) \int_0^t \frac{c}{a(t')} dt'$$

Trovandoci a redshift elevato possiamo assumere EdS (la crescita è lineare nel tempo), quindi

$$R_H \propto \begin{cases} a^2 & \text{per } a < a_{eq} \\ a^{3/2} & \text{per } a > a_{eq} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{poiché } w = 1/3 \Rightarrow a \propto t^{1/2} \\ \text{poiché } w = 0 \Rightarrow a \propto t^{2/3} \end{array}$$

dove stiamo usando il fattore di scala come cronometro. Con le relazioni appena trovate possiamo ricavare quelle per la massa contenuta nell'orizzonte:

$$M_H \propto \rho_M R_H^3 \propto a^{-3} R_H^3 \propto \begin{cases} a^3 & \text{per } a < a_{eq} \\ a^{3/2} & \text{per } a > a_{eq} \end{cases}$$

Che in termini di redshift diventano

$$M_H \propto \begin{cases} (1+z_H)^{-3} & \text{per } z < z_{eq} \\ (1+z_H)^{-3/2} & \text{per } z > z_{eq} \end{cases} \quad (10.27)$$

Le (10.27) ci dicono che massa entra nell'orizzonte ad un determinato redshift.

Allo stesso modo possiamo chiederci come varii il comportamento della varianza in massa dentro e fuori dall'orizzonte. Abbiamo visto che l'andamento con il tempo è proporzionale al modo crescente delle soluzioni della relazione di dispersione $\sigma_M \propto \delta_+(t)$ e che fuori dall'orizzonte

$$\delta_+(t) \propto \begin{cases} a^2 & \text{per } a < a_{eq} \\ a & \text{per } a > a_{eq} \end{cases}$$

Possiamo quindi ottenere la varianza di massa delle perturbazioni all'entrata nell'orizzonte

- $a < a_{eq}$,

$$\sigma_{M,H} = \sigma_M(a_i) \left(\frac{a}{a_i} \right)^2 \propto \sigma_M(a_i) \left(\frac{1+z}{1+z_i} \right)^{-2} \propto \sigma_M(a_i) M_H^{2/3}$$

- $a > a_{eq}$,

$$\sigma_{M,H} = \sigma_M(a_i) \left(\frac{a_{eq}}{a_i} \right)^2 \left(\frac{a}{a_{eq}} \right) \propto \sigma_M(a_i) \left(\frac{1+z}{1+z_i} \right)^{-1} \propto \sigma_M(a_i) M_H^{2/3}$$

dove devo tenere conto dei due diversi andamenti, prima $\left(\left(\frac{a_{eq}}{a_i} \right)^2 \right)$ e dopo $\left(\left(\frac{a}{a_{eq}} \right) \right)$ l'equivalenza.

L'altezza delle perturbazioni misurata al tempo dell'entrata nell'orizzonte va sempre allo stesso modo, indipendentemente da se questo avvenga prima o dopo l'equivalenza. Quindi la varianza di massa delle perturbazioni al momento dell'entrata (ricordando che $\sigma_M \propto M^{-(3+n)/6}$) è

$$\sigma_M(a_H) \propto M^{-(3+n)/6} M_H^{2/3} \propto M_H^{(1-n)/6}$$

Questo ci dice che se lo spettro primordiale è quello di Zel'dovich, le perturbazioni di densità entrano nell'orizzonte in momenti diversi ma tutte con la stessa ampiezza.

Dunque, riassumendo, se è valido lo spettro di Zel'dovich ($n = 1$) previsto dai modelli inflazionari abbiamo che

- Sono previste delle fluttuazioni del potenziale gravitazionale completamente indipendenti dalla scala. Costituiscono cioè un “rumore bianco” ovvero sono costanti su tutte le scale.
- L'ampiezza delle perturbazioni che entrano nell'orizzonte prima dell'equivalenza, subendo quindi l'effetto di stagnazione, sono tutte uguali.

Se $n \neq 1$ possono verificarsi⁷ due casi:

- $n > 1 \Rightarrow \sigma_M(a_H) \propto M^\beta$, con $\beta < 0$: le perturbazioni di massa minore entrano nell'orizzonte con una scala maggiore rispetto a quelle di massa maggiore. Questo porta alla formazione delle strutture piccole prima di quelle grandi (bottom-up).

⁷un piccolo graziearcazzo..

- $n < 1 \Rightarrow \sigma_M(a_H) \propto M^\gamma$, con $\gamma > 0$: le perturbazioni di massa maggiore hanno un'ampiezza maggiore rispetto a quelle di massa minore, al momento dell'ingresso nell'orizzonte questo ritarda la formazione delle strutture più piccole (top-down).

10.3.1 Nota sullo Spettro di Zel'dovich

Abbiamo detto che l'inflazione predice un indice spettrale di Zel'dovich ma questo è un bias legato al fatto che lo spettro di Zel'dovich ha delle caratteristiche allettanti. In primis, se l'origine delle fluttuazioni è imputabile all'inflazione, essendo il processo che le genera randomico, avranno una distribuzione gaussiana, rappresenteranno cioè un rumore bianco. Dal momento che tali fluttuazioni sono originate nella metrica, ci aspettiamo che le fluttuazioni del potenziale gravitazionale siano indipendenti dalla scala, e questa è una delle caratteristiche che lo spettro di Zel'dovich offre.

Altro vantaggio dell'avere $n = 1$ sta nell'invarianza di scala dell'ampiezza delle perturbazioni all'ingresso nell'orizzonte. Ovvero, perturbazioni su scale diverse entrano nell'orizzonte in momenti diversi, cioè quando ognuna raggiunge una determinata ampiezza.

Ciò che il modello dell'inflazione non predice è il valore di A che compare nella (10.21). Questo valore può essere ricavato esclusivamente dalle osservazioni.

Riprendendo i modelli introdotti nella trattazione dell'inflazione, sarebbe possibile dimostrare che l'indice spettrale è funzione delle derivate prima e seconda del potenziale V :

$$n - 1 = -\frac{3}{8\pi} \left(\frac{V'}{V} \right)^2 \frac{2}{8\pi} \left(\frac{V''}{V} \right)$$

ricordando inoltre i parametri di lento rotolamento che avevamo definito nelle (6.51)-(6.52),

$$\begin{cases} \epsilon := \frac{1}{16\pi} \left(\frac{V'}{V} \right)^2 \\ \eta := \frac{1}{8\pi} \left(\frac{V''}{V} \right) \end{cases}$$

possiamo allora scrivere

$$n - 1 = -6\epsilon + 2\eta \neq 0$$

I parametri di lento rotolamento, infatti, per garantire il raggiungimento del numero di e -folding, devono essere sì molto piccoli, ma non nulli. Quindi l'assunzione $n = 1$ va rivista, poiché i parametri attualmente assunti portano a $-6\epsilon + 2\eta = -0.004$, si è soliti assumere

$$n = 0.96$$

come **indice spettrale predetto dai modelli inflazionari**.

Il discorso però può anche essere fatto al contrario: misurando n dai dati possiamo ricavare una combinazione dei parametri di slow-rolling, riuscendo così a caratterizzare il modello inflazionario.

10.4 Evoluzione dello Spettro di Potenza

10.4.1 Effetto della Stagnazione

Nel momento in cui le perturbazioni entrano nell'orizzonte in epoca precedente all'equivalenza si genera un effetto di stagnazione: per effetto dell'intenso campo di radiazione le perturbazioni possono crescere al più di un fattore $5/2$, cosa che per noi è come dire che si mantengono costanti. Questo porterà inevitabilmente ad una modifica dello spettro di potenza primordiale. Tale processo termina con l'equivalenza, momento in cui la radiazione non è più dominante e quindi il contributo della microfisica al bilancio dinamico complessivo diventa trascurabile. Se ad esempio supponiamo che la materia oscura sia fredda, le perturbazioni a subire per più tempo l'effetto della stagnazione saranno quelle di più piccola scala, poiché sarebbero queste le prime ad entrare nell'orizzonte. È quindi dovuto al diverso fattore di crescita che hanno scale diverse a determinare la modifica dello spettro di potenza primordiale.

Vogliamo ora ottenere come si presenta lo spettro di potenza al tempo dell'equivalenza in funzione della scala, $P(k, t_{eq})$. Per farlo dobbiamo calcolare di quanto cresce una fluttuazione primordiale, $\delta(k, a_i) = \delta_i$, dall'istante iniziale, t_i , all'equivalenza, t_{eq} . Da t_{eq} in poi gli effetti dovuti alla microfisica non sono più rilevanti e lo spettro cresce in maniera non lineare (come vedremo più avanti). Distinguiamo quindi tra i due casi in cui le perturbazioni possono entrare nell'orizzonte:

- se la scala k è tale che $a_H < a_{eq}$, ovvero quando al momento dell'equivalenza è già avvenuta l'entrata nell'orizzonte, allora la fluttuazione subisce l'effetto di stagnazione e consideriamo esclusivamente la crescita avvenuta prima dell'ingresso entro R_H :

$$\delta(k, a_{eq}) = \delta_i \left(\frac{a_H}{a_i} \right)^2 \propto \delta_i a_H^2$$

Ora, poiché $R_H \propto t$ e $a \propto t^{1/2}$, quindi $R_H \propto a^2$, scriviamo

$$M_H \propto \rho_{DM} R_H^3 \propto a^{-3} a^6 \propto a^3$$

$$a \propto M_H^{1/3}$$

Sostituendo nella formula per $\delta(k, a_{eq})$ trovata e ricordando che $M \propto R^3 \propto k^{-3}$ otteniamo

$$\delta(k, a_{eq}) \propto \delta_i M_H^{2/3} \propto \delta_i k^{-2}$$

Questa posso inserirla nella formula per l'andamento dello spettro di potenza, ottenendo

$$P(k) \propto \delta^2(k) \propto (\delta_i k^{-2})^2 \propto P_i k^{-4}$$

.

Se accettiamo come spettro iniziale quello a legge di potenza, abbiamo che l'evoluzione va come

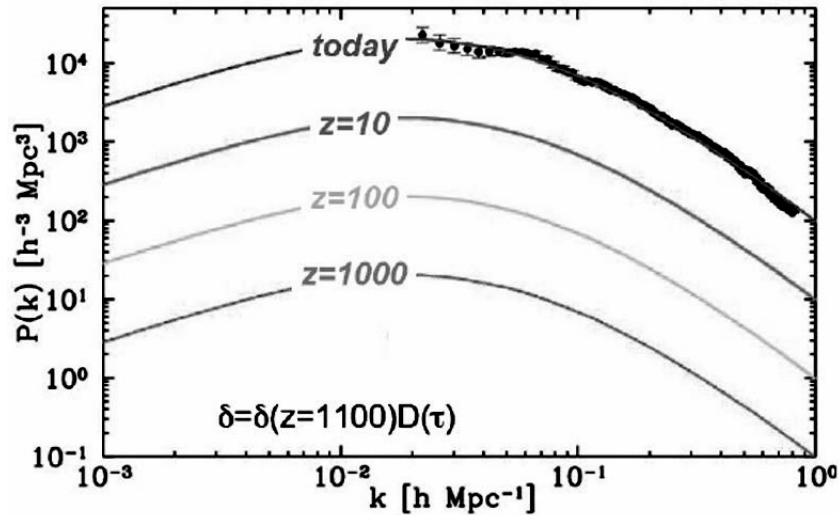


Figura 10.4: *Evoluzione dello spettro di potenza nel tempo, ad istanti successivi lo spettro si “alza”, parallelamente a se stesso.*

$$P(k) \propto k^{n-4} \quad (10.28)$$

che quindi nel caso di spettro di Zel’dovich andrà come k^{-3} .

- se invece la scala k è tale che $a_H > a_{eq}$, ovvero quando al momento dell’equivalenza non è ancora avvenuta l’entrata nell’orizzonte, le fluttuazioni non subiscono l’effetto di stagnazione e si ha una crescita ininterrotta fino ad a_{eq} , quindi scriviamo

$$\delta(k, a_{eq}) = \delta_i \left(\frac{a_{eq}}{a_i} \right)^2 \propto \delta_i$$

Il valore $\left(\frac{a_{eq}}{a_i} \right)^2$, poiché a_{eq}/a_i è costante, e quindi la crescita delle perturbazioni è autosimilare:

$$P(k) \propto P_i \propto k^n \quad (10.29)$$

lo spettro di potenza su scale maggiori dell’orizzonte cresce indisturbato senza variare andamento.

In Figura 10.4 è mostrato l’andamento dello spettro imperturbato per il quale la crescita lineare è indipendente dalla scala. In tempi successivi lo spettro cresce parallelamente a quello dell’istante precedente.

Poiché però al passare del tempo il raggio dell’orizzonte cresce, mano a mano ingloberà scale delle perturbazioni sempre più grandi, quando una scala è inglobata smette di crescere. All’inizio la scala dell’orizzonte si trova nella regione destra del grafico (alti k e bassi R), mano a mano che passa il tempo si sposta verso sinistra (verso k minori ed R maggiori), di conseguenza le scale inglobate aumentano in questa direzione e, mano a mano che entrano si bloccano, provocando il “congelamento” dello spettro $P(k)$ che smette di evolvere.

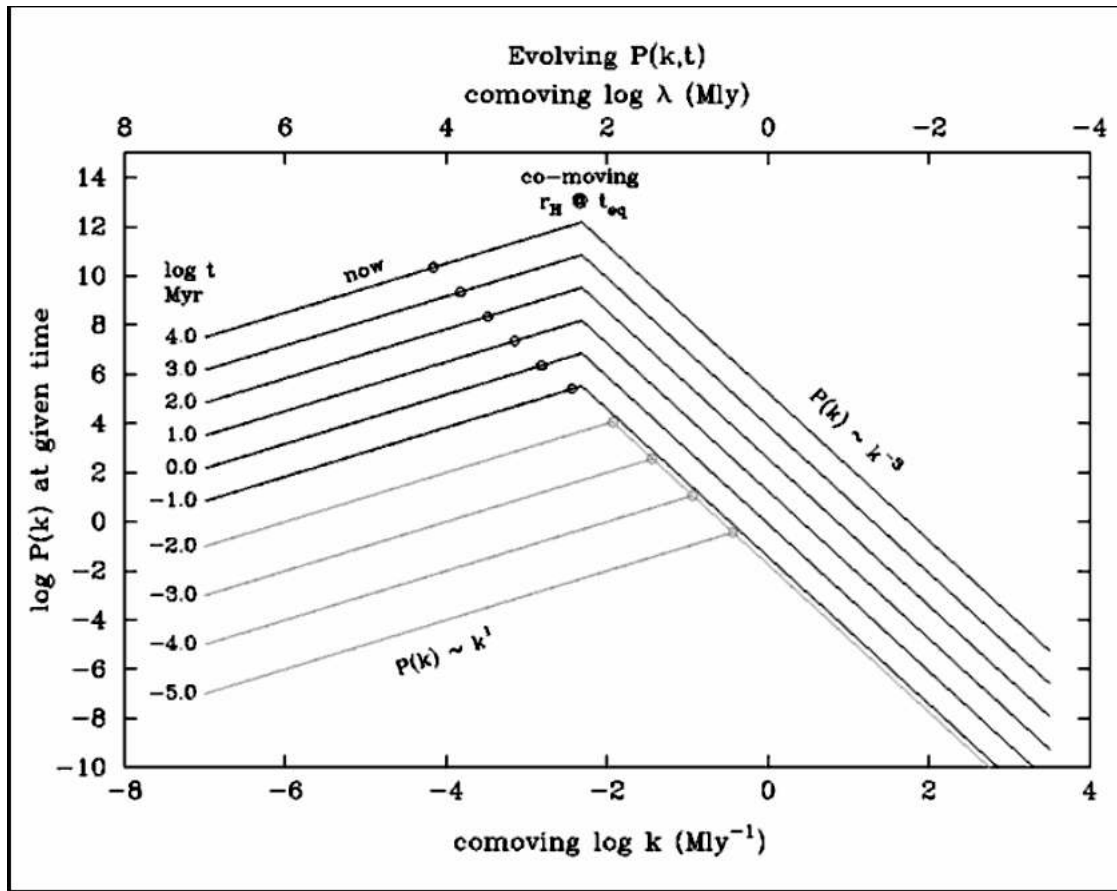


Figura 10.5: Evoluzione reale dello spettro di potenza, tenuto conto dell'aumentare della scala dell'orizzonte.

La situazione reale, assunto uno spettro di Zel'dovich con $n = 1$, per scale il cui ingresso nell'orizzonte avviene prima dell'equivalenza è quella in Figura 10.5. In questo caso abbiamo che lo spettro cambia via via pendenza e passa da $\propto k$ a $\propto k^{-3}$, come dato dalla (10.28).

Le scale che non entrano nell'orizzonte non vengono alterate. Il valore di k che corrisponde alla transizione tra i due regimi è quello della scala dell'orizzonte cosmologico dell'equivalenza.

Il passaggio da $\propto k$ a $\propto k^{-3}$ è ovviamente graduale (k^{-3} è il comportamento asintotico). Mentre a sinistra del picco l'andamento è quello primordiale di Zel'dovich, a destra si può determinare l'**indice spettrale effettivo**, n_{eff} . Per le scale che non sono entrate nell'orizzonte prima dell'equivalenza tale indice rimane $n_{eff} = 1$, per quelle che invece vi entrano avremo che $n_{eff} = -1$ vicino al picco e diventa via via minore mano a mano che ci spostiamo verso destra nel grafico fino ad arrivare, per i k maggiori, a $n_{eff} = -2 \div -3$. Riportando il discorso sulla massa di strutture note, abbiamo che gli ammassi di galassie hanno $n_{eff} \approx -1$ e le galassie $n_{eff} \approx -2$. I valori estremali per k molto piccole ($n = 1$) e k molto grandi ($n = -3$) è in linea con gli indici richiesti per avere clustering gerarchico.

In Figura 10.6 a destra è riportato l'andamento della varianza di massa in funzione di k . Osservando la linea continua si può vedere come, minore è k (che significa un filtro più grande cioè una scala più grande R su cui effettuare la media) più i nostri risultati tendono al valore medio, e quindi la varianza è piccola fino a tendere a zero. Questo grafico mostra quindi l'andamento che avevamo già anticipato.

Considerando invece la curva a sinistra, che è equivalente al grafico in Figura 10.5, abbiamo un'informazione fondamentale, ovvero che la posizione del picco corrisponde al raggio di equivalenza. Riuscire ad osservare questo spettro significherebbe quindi poter misurare la scala k corrispondente al raggio dell'orizzonte all'equivalenza. Poiché tale raggio in funzione del fattore di scala si scrive

$$R_H(t_{eq}) = a(t_{eq}) \int_0^{t_{eq}} \frac{c dt'}{a(t')} = a(t_{eq}) \int_0^{a_{eq}} \frac{c da}{a\dot{a}}$$

appare ovvio che esso dipende da $\dot{a}$ e questo ci parla delle sue dipendenze dai parametri cosmologici. La prima dipendenza è quella con H_0 , avevamo infatti visto dall'equazione di Friedmann che qualsiasi sia il modello di Universo, vale $\dot{a} = aH_0E(z)$. Quindi conoscere il raggio dell'orizzonte ci consente di fissare H_0 , e quindi fissare tutte le scale di distanza.

La seconda dipendenza è quella dal redshift $E(z) \propto z$ che ha in seno i parametri di densità eccetera, infatti dalla definizione di equivalenza otteniamo

$$\rho_M(a_{eq}) = \rho_R(a_{eq}) \Rightarrow \rho_{0,M} \left(\frac{a_{eq}}{a_0} \right)^{-3} = \rho_{0,R} \left(\frac{a_{eq}}{a_0} \right)^{-4} \Rightarrow (1 + z_{eq}) = \frac{\rho_{0,M}}{\rho_{0,R}}$$

ma considerando che l'equivalenza avviene a $10^3 < z < 10^4$ il contributo della dark energy non è rilevante e dunque non ha effetti sul grafico. E quindi misurare il raggio dell'orizzonte di equivalenza permetterebbe di determinare quanta materia c'è nell'Universo (avere più o meno materia fa variare z_{eq} e quindi $R_{H,eq}$).

Nel grafico di Figura 10.6 la linea continua corrisponde ad un Universo con $\Omega_M = 1$, per quella tratteggiata invece $\Omega_M = 0.3$. Avere meno materia quindi fa scendere il valore di z_{eq} (cioè si avvicina a noi), di conseguenza il raggio dell'orizzonte all'equivalenza cresce (e k decresce) e il range di scale che possono entrarvi si allarga verso scale più grandi, subendo anch'esse il conseguente effetto di stagnazione, viceversa la frazione di scale che mantengono la pendenza primordiale dello spettro si riduce. È allora evidente che la posizione del picco è estremamente dipendente anche da Ω_M (oltre che da H_0 , che influisce anche di più).

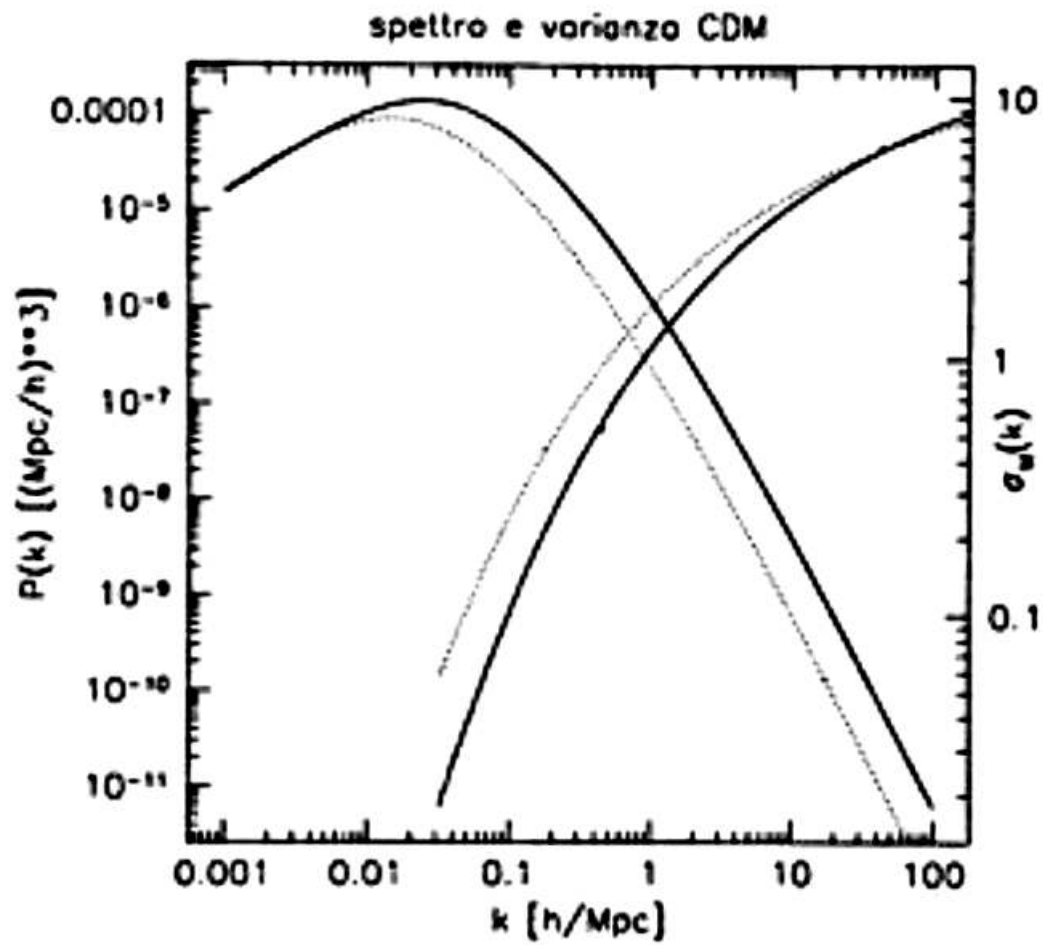


Figura 10.6: Andamenti di spettro di potenza (a sinistra) e varianza di massa (a destra) in funzione di k .

Si potrebbe dimostrare che la posizione della scala dell'orizzonte all'equivalenza (i.e. la posizione del picco) è dell'ordine di

$$R_{H,eq} \approx 16(\Omega_{0,M}h^2)^{-1} Mpc$$

che come preannunciato non dipende dalla costante cosmologica poiché siamo a redshift troppo alto perché questa possa essere influente.

È possibile rappresentare gli spettri di potenza anche graficando la **potenza vera** (e non la densità di potenza come visto fin qui). Questo è quanto riportato nel grafico in Figura 10.7.

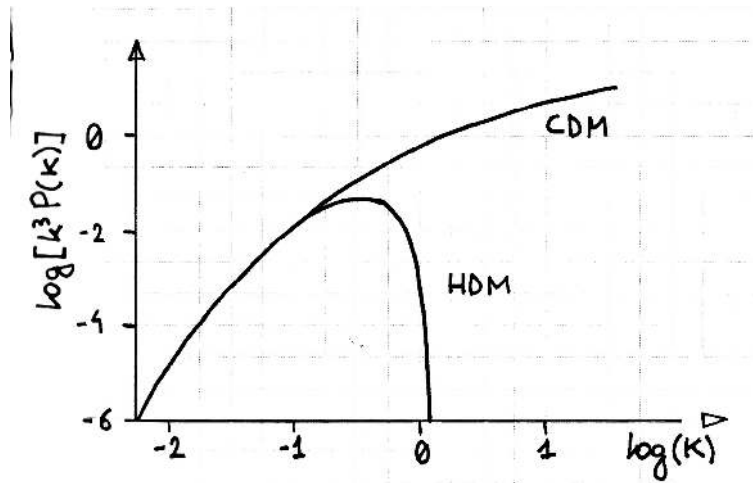


Figura 10.7: Andamento della potenza vera in funzione della scala per i due casi di materia oscura calda e fredda.

Nel grafico sono riportati i comportamenti sia di HDM che di CDM. La potenza vera si ottiene dal prodotto $k^3 P(k)$ quindi cambia l'andamento (confrontare quello per CDM con quello visto prima). Abbiamo andamenti asymptotici diversi, per la CDM:

$$k^3 P(k) \propto \begin{cases} k^3 k^1 = k^4 & k \text{ piccoli, } R \text{ e } M \text{ grandi} \\ k^3 k^{-3} = 1 & k \text{ grandi, } R \text{ e } M \text{ piccoli} \end{cases}$$

Poiché sappiamo che la maggior parte della materia oscura deve essere fredda, e considerato che supponiamo la maggior parte della HDM sia composta da neutrini, misurare la soppressione dell'andamento di $P(k)k^3$ rispetto a quello della CDM è attualmente il più efficace metodo per misurare la massa dei neutrini.

Nota sulla misura dell'indice spettrale: Noi stimeremo n con precisione basandoci sui dati della CMB ma questa non è l'unica strada possibile. Ottenendo lo spettro di potenza come in Figura 10.6 dell'Universo intorno a noi, potremmo determinare direttamente la pendenza della parte del grafico a sinistra del picco, ovvero la parte non perturbata dalla microfisica. Questo però non è immediato infatti le più grandi strutture virializzate che osserviamo sono sulla scala degli ammassi di galassie. Tale scala si trova però a destra del picco, per campionare la parte a sinistra a cui siamo interessati dovremmo poter osservare scale che coprono volumi molto grandi di Universo ed è quindi evidente la difficoltà.

10.4.2 Effetto del Free Streaming

Il free-streaming è un effetto di microfisica che agisce sulla DM, le perturbazioni con scala inferiore alla scala di free-streaming (che corrisponde circa alla scala di Jeans) vengono cancellate. Proseguendo il grafico per la CDM⁸ in Figura 10.7 e andando a k sempre maggiori, si raggiungerebbe k_{FS} . Raggiunto questo valore la potenza va velocemente a zero, come mostrato in Figura 10.8.

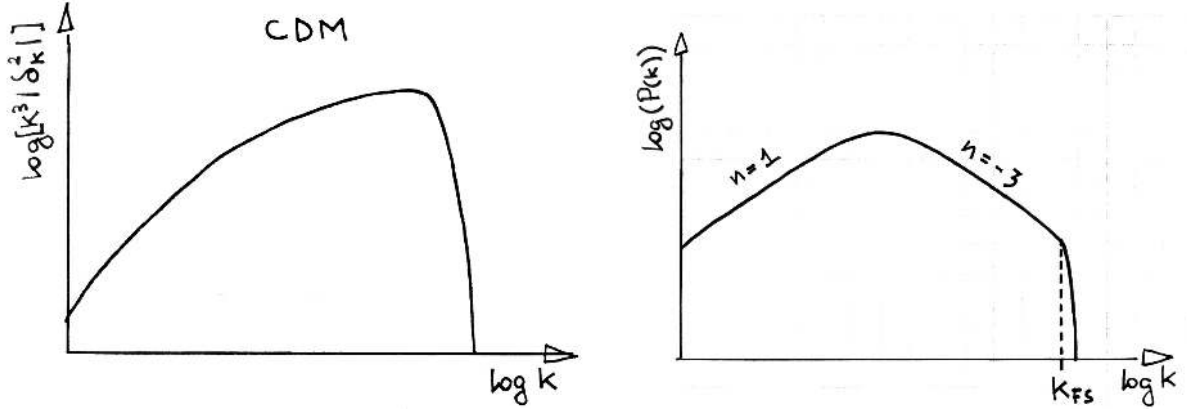


Figura 10.8: A sinistra andamento della potenza vera in funzione della scala per la CDM esteso fino alla scala di free-streaming. A destra idem con lo spettro di potenza.

La differenza profonda con la HDM è quindi che per questa tale cut-off avviene a scale molto diverse (è infatti visibile in Figura 10.7) rispetto alla CDM.

Essendo la HDM, al momento del disaccoppiamento dalla radiazione, ancora relativistica ha masse di Jeans molto grandi e conseguentemente anche masse di free-streaming, e quindi il cut-off si sposta a k piccoli, di rilevanza cosmologica. Avere il picco della potenza a k piccoli significa che sono le perturbazioni di massa molto grande sono più probili rispetto a quelle di massa piccola. Viceversa la CDM è molto più probabile che sviluppi perturbazioni di massa piccole. Questa differenza da origine ai due differenti scenari, bottom-up o top-down. In particolare i due picchi corrispondono a $10^{5\div6} M_{\odot}$ per la CDM e a $10^{15\div16} M_{\odot}$ per la HDM.

Dal punto di vista della trattazione teorica questa è la sola differenza esistente tra i modelli di HDM e CDM.

10.4.3 Funzione di Trasferimento

La variazione globale dello spettro di potenza $P(k)$ può essere scritta in modo sintetico e parametrico definendo una funzione di trasferimento $T(k)$ che dice quanta parte della fluttuazione primordiale $\delta(k)$ sopravvive indenne alla microfisica. Si scrive

$$P(k, a_{eq}) = P(k, a_i) T^2(k) \quad (10.30)$$

Per la CDM abbiamo trovato che valgono la (10.28) e la (10.29), da queste e dalla (10.30) abbiamo

⁸Ricordare che nello spazio di Fourier, la scala di Jeans è un limite superiore, al contrario di quanto avviene per lo spazio reale. Quindi $k > k_J$ significa che le perturbazioni non collassano.

$$T(k) = \begin{cases} k^{-2} & \text{per } a_H < a_{eq} \\ k^0 = \text{cost} & \text{per } a_H > a_{eq} \end{cases}$$

Riportato l'andamento in Figura 10.9 e assumendo uno spettro di Zel'dovich possiamo scrivere

$$P(k, a_{eq}) = AkT^2(k)$$

La funzione di trasferimento agisce come una sorta di filtro, lasciando passare le scale piccole (in k , quindi quelle non ancora entrate nell'orizzonte degli eventi) e bloccando quasi tutto quello che arriva dalle scale più grandi.

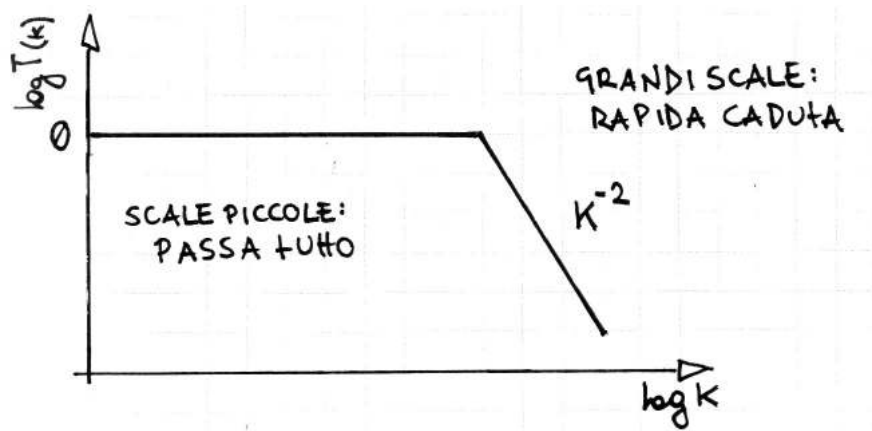


Figura 10.9: Funzione di trasferimento.

!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!tra pg.196-197 appunti, digressione sul campo di densità interessante ma scritta male.

10.4.4 Evoluzione Dopo l'Equivalenza

In Figura 10.10 è mostrato l'andamento dello spettro di potenza in diverse epoche. Sono riportati innanzitutto gli andamenti già visti: la curva puntinata rappresenta lo spettro primordiale creato dall'inflazione; la curva continua rappresenta lo spettro modificato dalla microfisica all'epoca dell'equivalenza (sappiamo che questo avviene a redshift molto elevato, anche perché è già elevato lo z della CMB che, come sappiamo, è prodotta nella ricombinazione che successiva all'equivalenza).

Gli andamenti tratteggiati rappresentano l'evoluzione dopo l'equivalenza. Poiché le fluttuazione della CMB sono dell'ordine di 10^{-5} , questo significa che quelle all'epoca dell'equivalenza devono essere ancora più piccole. Se ciò è vero siamo ancora pienamente nel regime delle perturbazioni lineari, questo significa che dopo t_{eq} lo spettro cresce con una legge indipendente dalla scala. Ad istanti successivi è traslato parallelamente a se stesso (**crescita self-similar**), crescendo con un fattore a^2 come avevamo calcolato per il regime lineare. Le fluttuazioni continuano a crescere finché non raggiungono un valore $\delta \rightarrow 1$ o, equivalentemente, $\sigma_M \rightarrow 1$. Da questo momento in poi non è più valida l'approssimazione lineare, e l'unico modo per vedere come evolve lo spettro di potenza diventano le simulazioni numeriche.

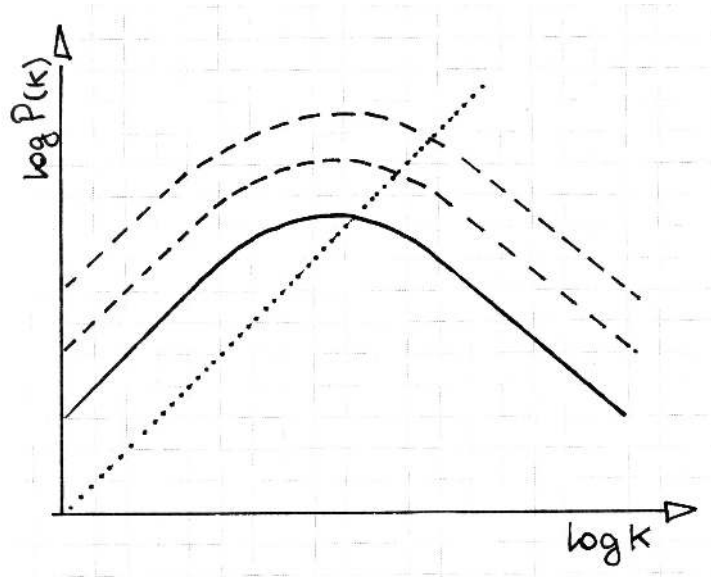


Figura 10.10: Tre fasi principali dell'evoluzione dello spettro di potenza. Punti = primordiale; continua = equivalenza; tratti = post-equivalenza.

Ci si chiede quali siano le scale che per prime escono dal regime lineare. Tornando ancora al grafico di Figura 10.6 e confrontando l'andamento di σ_M con quello di $P(k)$ emerge che le scale k che per prime raggiungono il regime non lineare sono quelle più grandi (ovvero quelle corrispondenti alle masse più piccole), che si trovano sulla destra del grafico. Il passaggio al regime non lineare di certe scale prima di altre deforma lo spettro in maniera progressiva al crescere di k . L'effetto netto è quello di un innalzamento dello spettro rispetto a quello self-similare dell'evoluzione lineare (Figura 10.11), questo avviene perché in regime non lineare il tasso di crescita è maggiore.

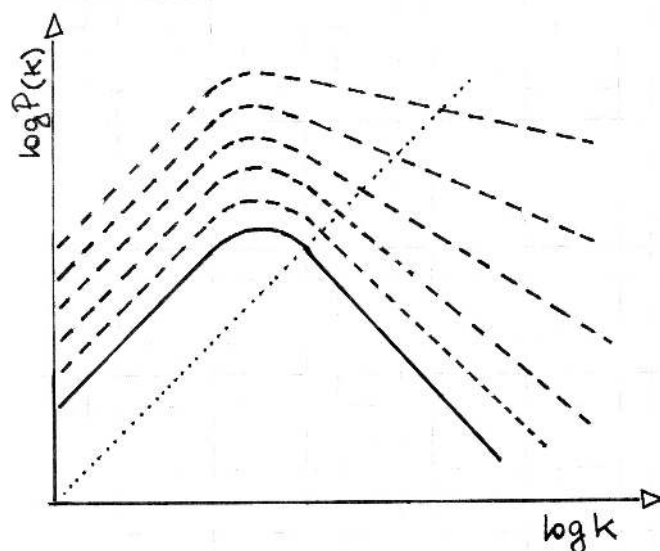


Figura 10.11: Evoluzione dopo l'equivalenza in regime non lineare.

L'andamento delle perturbazioni di più grande massa continua quindi ad evolvere parallelamente allo spettro dell'equivalenza, quelle di più piccola massa invece crescono più velocemente, lo spettro si innalza.

Questo è un ulteriore motivo per studiare lo spettro a k piccoli per risalire alla sua forma originale: a k elevati è troppo deformato mentre ancora oggi alle scale minori evolve in maniera lineare.

10.5 Considerazioni sulla Distribuzione delle Perturbazioni

Abbiamo detto che la distribuzione delle fluttuazioni create dall'inflazione è una **Distribuzione Gaussiana**, poiché il processo che le genera è casuale. Abbiamo però anche detto che esiste un limite fisico oltre il quale tale distribuzione non può estendersi, dovuta al fatto che la densità è una quantità sempre positiva:

$$\delta = \frac{\delta\rho}{\rho} = \frac{\rho - \bar{\rho}}{\bar{\rho}} = \frac{\rho}{\bar{\rho}} - 1 > -1$$

(inizio Capitolo 8). Questo significa che la distribuzione non può essere perfettamente gaussiana, in quanto la probabilità di avere un valore minore $\delta < -1$ dovrebbe essere nullo.

Supponiamo però che tale distribuzione possa essere approssimata ad una gaussiana troncata a -1 . Ci chiediamo allora come evolva tale distribuzione nel tempo. Il regime è lineare inizialmente e va come $\delta \propto \delta_i \delta_+$, quindi se $\delta_+ = 2$, allora tutte le δ crescono di un fattore 2 (n.b. il fattore di crescita δ_+ non dipende dal valore di δ). Poiché

$$\sigma^2 \propto \langle \delta^2 \rangle \propto \delta_i^2 \delta_+^2 \propto \sigma_i^2 \delta_+^2$$

allora in regime lineare la gaussiana viene modificata per la variazione della varianza. Se la varianza cresce quindi, la gaussiana si allarga e il picco decresce (Figura 10.12).

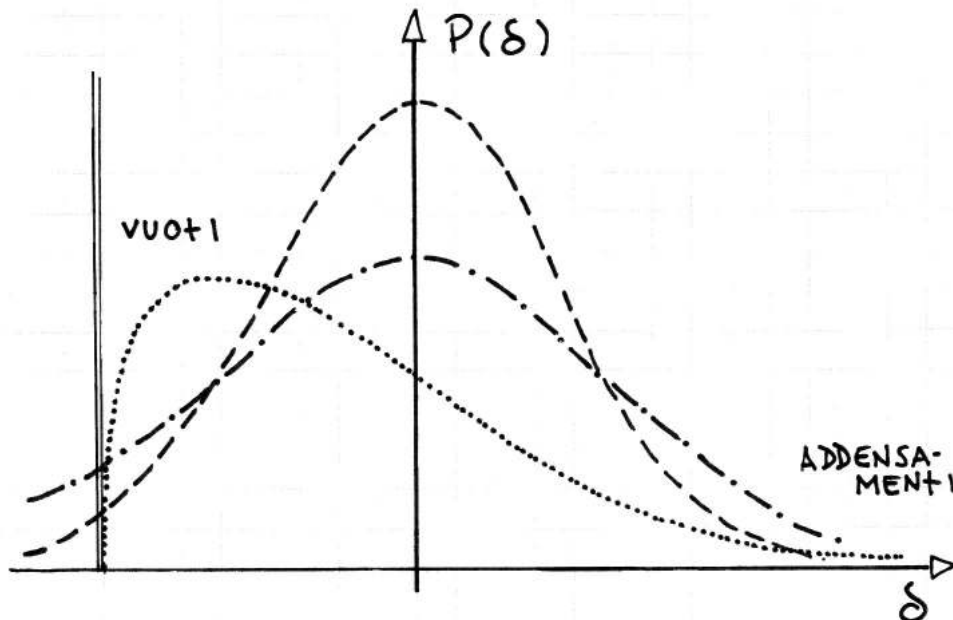


Figura 10.12: *Evoluzione della distribuzione gaussiana, troncata a $\delta = -1$.*

Man mano che le fluttuazioni crescono ci si sposta sempre di più verso un regime non lineare, che però interessa entrambi i valori asintotici, $+\infty$ e -1 , poiché è il valore assoluto

della fluttuazione quello che conta in questo caso. Mentre la “non-linearità” aumenta, nella parte destra del grafico non abbiamo problemi poiché non esiste un limite superiore e la massa può aggregarsi quanto le pare. La situazione è diversa nella parte sinistra dove abbiamo le fluttuazioni negative che incontrano il limite inferiore di -1 . Questo costituisce un muro invalicabile e la distribuzione diventa skewed (distorta) perché la probabilità di avere valori molto prossimi a -1 aumenta molto ed è compensata da pochi valori grandi positivi. La densità media infatti non deve cambiare, cioè l’area sottesa dalla distribuzione deve rimanere la stessa (deve essere uguale ad 1 visto che è una probabilità).

In ragione di questo ci attendiamo un Universo “pieno” di regioni vuote con grandi addensamenti di materia sparsi, ed è quello che effettivamente osserviamo.

Questo discorso è valido su scale molto grandi, quelle cioè che hanno mantenuto la distribuzione gaussiana generata nell’inflazione. Su scala galattica o degli ammassi di galassie non osserviamo una distribuzione gaussiana.

Capitolo 11

Evoluzione Non Lineare

Dopo l'equivalenza, le fluttuazioni nella componente di materia δ su scale maggiori di $M_J(z_{eq})$ possono crescere, secondo quanto visto nei precedenti capitoli. Per studiare l'evoluzione delle perturbazioni abbiamo usato fin qui l'approssimazione lineare, applicabile fintanto che $\delta \ll 1$. L'approssimazione lineare smette però di essere valida quando δ cresce abbastanza. Ma nell'Universo attuale esistono addensamenti di materia tali che $\delta \gg 1$ (basti pensare che gli ammassi di galassie corrispondono a valori di δ dell'ordine di diverse centinaia o superiori, ma sono sufficienti anche strutture di massa inferiore).

Per tenere conto della formazione di strutture dobbiamo dunque sviluppare una teoria non lineare adeguata. Questo è un problema molto più complesso della teoria lineare e viene fatto analiticamente quando possibile o ricorrendo a simulazioni numeriche.

11.1 Collasso Sferico

L'approccio più semplice all'evoluzione non lineare è quello di studiare una inhomogeneità che abbia una qualche particolare forma semplice dotata di simmetrie. Esiste infatti una soluzione analitica (**Soluzione di Tolman**) alla teoria delle perturbazioni non lineari che assume (i) una **perturbazione perfettamente sferica** e (ii) **velocità comovente iniziale nulla**, $v_i = 0$. Si assume per semplicità il modello EdS ma la soluzione è ottenibile anche senza questa assunzione. Abbiamo precedentemente ottenuto nella Sezione 8.3 le soluzioni per l'evoluzione lineare in universi EdS:

$$\delta \propto t^{-(1\pm 5)/6} \propto \begin{cases} t^{2/3} & \text{soluzione crescente, } \delta_+ \\ t^{-1} & \text{soluzione decrescente, } \delta_- \end{cases}$$

Da queste otteniamo l'evoluzione delle perturbazioni in regime lineare:

$$\delta = \delta_+(t_i) \left(\frac{t}{t_i} \right)^{2/3} + \delta_-(t_i) \left(\frac{t}{t_i} \right)^{-1} \quad (11.1)$$

mantenendo entrambi i modi, nonostante quello decrescente mano a mano che le perturbazioni crescono, tende a diventare meno importante, vogliamo infatti vedere quanta parte delle perturbazioni totali cresce e quanta decresce. Ricordiamo la relazione tra v e $\dot{\delta}$ trovata in regime lineare

$$v = \frac{i\dot{\delta}}{k} \quad (11.2)$$

e, poichè in universi EdS $a \propto t^{2/3}$, possiamo passare da coordinate proprie a coordinate comoventi applicando

$$k_{com} = a^{-1} k_{prop} = \left(\frac{t}{t_i} \right)^{-2/3} k_i$$

così che la (11.2) diventi

$$v = \frac{i\dot{\delta}}{k_i(t/t_i)^{-2/3}}$$

dalla quale, sostituendo $\dot{\delta}$ con la derivata temporale della (11.1), possiamo trovare come varia la velocità in regime lineare:

$$v = \frac{i}{k_i(t/t_i)^{-2/3}} \left[\frac{2}{3} \delta_+(t_i) \left(\frac{t}{t_i} \right)^{-1/3} \frac{1}{t_i} - \delta_-(t_i) \left(\frac{t}{t_i} \right)^{-2} \frac{1}{t_i} \right]$$

$$v = \frac{i}{k_i t_i} \left[\frac{2}{3} \delta_+(t_i) \left(\frac{t}{t_i} \right)^{1/3} - \delta_-(t_i) \left(\frac{t}{t_i} \right)^{-4/3} \right]$$

Calcoliamo ora la velocità a $t = t_i$ e applichiamo la condizione (ii), $v_i = 0$,

$$\frac{2}{3} \delta_+(t_i) - \delta_-(t_i) = 0$$

$$\delta_-(t_i) = \frac{2}{3} \delta_+(t_i)$$

con la quale la (11.1) diventa

$$\delta(t_i) = \delta_-(t_i) + \delta_+(t_i) = \frac{5}{3} \delta_+(t_i)$$

Quindi di tutta la perturbazione iniziale i $\frac{3}{5}$ possono crescere e $\frac{2}{5}$ decrescono. Arriviamo quindi alla

$$\delta(t) = \frac{3}{5} \delta_+(t_i) \left(\frac{t}{t_i} \right)^{2/3} \quad (11.3)$$

Questa scomposizione è valida soltanto perché abbiamo assunto $v_i = 0$, e considerata la (11.1) ci dice che

$$\delta_i = \delta(t_i) = \delta_+(t_i) + \delta_-(t_i)$$

$$\delta_+(t_i) = \frac{3}{5} \delta_i \quad (11.4)$$

L'idea di base della trattazione è quella di considerare una perturbazione completamente sferica immersa in un universo EdS (Figura 11.1)

Possiamo calcolare il parametro di densità che compete alla perturbazione¹

$$\Omega_p = \frac{\rho_p}{\rho_{crit}}$$

¹Il pedice “p” sta per “perturbazione”.

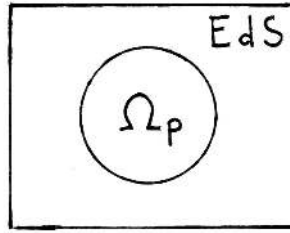


Figura 11.1: Si considera la perturbazione come un universo sferico immerso in un universo EdS.

Quindi la perturbazione è assimilabile ad un piccolo universo sferico con

$$\Omega_p(t_i) := \frac{\rho(t_i)(1 + \delta_i)}{\rho_{crit}(t_i)} \equiv \Omega(t_i)(1 + \delta_i) \quad (11.5)$$

dove $\Omega(t_i)$ è il parametro di densità dell'Universo di background. Sappiamo che gli universi di Friedmann collassano solo se sono chiusi (vedi Figura 2.3 del Capitolo 2) quindi la perturbazione in quest'ottica può crescere solo se il parametro di densità è maggiore di 1. La **condizione per il collasso della perturbazione sferica** è

$$\Omega_p(t_i) > 1$$

per cui

$$\Omega(t_i)(1 + \delta_i) > 1 \Rightarrow (1 + \delta_i) > \frac{1}{\Omega(t_i)}$$

che ci dice che

- se $\Omega(t_i) \geq 1$ ogni perturbazione positiva porta al collasso ($\delta_i > 0$);
- se $\Omega(t_i) < 1$ solo le perturbazioni

$$\delta_i > \frac{1}{\Omega(t_i)} - 1 \quad (11.6)$$

possono collassare.

Ciò significa che se la (11.6) è rispettata la perturbazione collassa sicuramente, costituisce quindi un **valore di soglia** che è necessario superare. Questo impone un **valore di soglia** che il modo crescente deve superare, dalla (11.4) allora

$$\delta_+ = \frac{3}{5}\delta_i > \frac{3}{5}\left(\frac{1}{\Omega(t_i)} - 1\right) = \frac{3}{5}\left(\frac{1 - \Omega(t_i)}{\Omega(t_i)}\right) \quad (11.7)$$

Avevamo visto che in un universo di Friedman ad una componente il parametro di densità evolve con il redshift secondo la

$$\Omega(z) = \frac{\Omega_0(1+z)^{1+3w}}{1 - \Omega_0 + \Omega_0(1+z)^{1+3w}}$$

che in un universo EdS ad una sola componente ($w = 0$) diventa

$$\Omega(z) = \frac{\Omega_0(1+z)}{1 - \Omega_0 + \Omega_0(1+z)}$$

Nella nostra trattazione $\Omega_0 \equiv \Omega_i = \Omega(t_i)$, parametro di densità dell'universo di background, allora la condizione (11.7) si scrive

$$\delta_+ > \frac{3}{5} \frac{1 - \Omega_i}{\Omega_i(1 + z_i)} \quad (11.8)$$

L'ultima relazione trovata ci dice che esiste una soglia da superare entro un determinato tempo utile affinché il collasso sia possibile. Mentre tale soglia è sempre superata quando l'universo di background è piatto o chiuso ($\Omega_i \geq 1$), questo non è vero per universi aperti, per i quali la (11.8) costituisce il requisito minimo. Questo non ci stupisce, abbiamo infatti ribadito più volte che in un universo aperto la formazione delle strutture è più difficile.

Stabilite quali sono le condizioni per il collasso, vediamo ora come questo avviene. Avendo approssimato la perturbazione ad un universo chiuso prendiamo la relativa Seconda Equazione di Friedmann per studiarne l'evoluzione del parametro di scala:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a_i}\right)^2 = H_i^2 \left[\Omega_p(t_i) \left(\frac{a_i}{a}\right) + 1 - \Omega_p(t_i) \right] \quad (11.9)$$

Come sappiamo in un universo chiuso il fattore di scala inizialmente cresce fino ad arrivare ad un valore massimo, per poi decrescere e tornare a zero² (Figura 11.2).

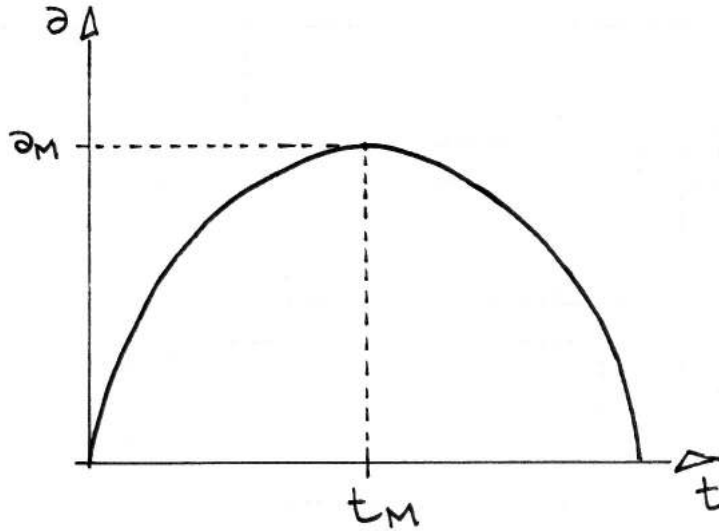


Figura 11.2: *Evoluzione del fattore di scala della perturbazione.*

La densità della perturbazione raggiunge il valore massimo al tempo t_{max} , detto **turn-around time**, dopo il quale comincia il collasso:

$$\rho_p(t_{max}) = \rho_p(t_i) \left(\frac{a_i}{a_{max}} \right)^3 \quad (11.10)$$

²Tuttavia i modelli di Friedmann avevano chiamato questo momento Big-Crunch

Quando il fattore di scala raggiunge il suo valore massimo l'espansione si arresta per cominciare il collasso, quindi, per trovare il tempo del massimo a_{max} (cronometro usando a), poniamo $\dot{a}_{max} = 0$, da cui la (11.9) ci dà

$$\Omega_p(t_i) \left(\frac{a_i}{a_{max}} \right) = \Omega_p(t_i) - 1$$

cioè vale

$$\left(\frac{a_i}{a_{max}} \right) = \frac{\Omega_p(t_i) - 1}{\Omega_p(t_i)}$$

Sostituiamo nella (11.10):

$$\rho_p(t_{max}) = \rho_{crit}(t_i) \Omega_p(t_i) \left(\frac{\Omega_p(t_i) - 1}{\Omega_p(t_i)} \right)^3 \quad (11.11)$$

Ricorriamo alle soluzioni parametriche trovate nel caso di universo sferico:

$$a(\theta) = a_0 \frac{\Omega_0}{2(\Omega_0 - 1)} (1 - \cos \theta)$$

$$t(\theta) = \frac{1}{2H_0} \frac{\Omega_0}{(\Omega_0 - 1)^{3/2}} (\theta - \sin \theta)$$

con le quali tra l'altro capiamo come si origina il comportamento sinusoidale del parametro di espansione in Figura 11.2. Poiché il tempo dipende da un seno il massimo si trova per $\theta = \pi$, da cui

$$t_{max} = \frac{\pi \Omega_0}{2H_0(\Omega_0 - 1)^{3/2}}$$

che tradotto per la nostra perturbazione si scrive

$$t_{max} = \frac{\pi}{2H_i} \frac{\Omega_p(t_i)}{(\Omega_p(t_i) - 1)^{3/2}} \quad (11.12)$$

La (11.11) può essere riscritta come

$$\frac{\rho_p(t_{max})}{\rho_{crit}(t_i) \Omega_p(t_i)} = \frac{(\Omega_p(t_i) - 1)^3}{\Omega_p^3(t_i)} \Rightarrow \sqrt{\frac{\rho_p(t_{max})}{\rho_{crit}(t_i)}} = \frac{(\Omega_p(t_i) - 1)^{3/2}}{\Omega_p(t_i)}$$

che possiamo sostituire nella (11.12) ottenendo

$$t_{max} = \frac{\pi}{2H_i} \sqrt{\frac{\rho_p(t_{max})}{\rho_{crit}(t_i)}} = \left[\frac{\pi^2}{4H_i^2} \frac{3H_i^2}{8\pi G} \frac{1}{\rho_p(t_{max})} \right]^{1/2}$$

$$t_{max} = \left[\frac{3\pi}{32G} \frac{1}{\rho_p(t_{max})} \right]^{1/2} \quad (11.13)$$

dove abbiamo sostituito la definizione di densità critica $\rho_{crit}(t_i) := \frac{3H_i^2}{8\pi G}$. Risolvendo la (11.13) per $\rho_p(t_{max})$ otteniamo la **densità della perturbazione al tempo del massimo**:

$$\rho_p(t_{max}) = \frac{3\pi}{32G} t_{max}^{-2}$$

Vogliamo quindi vedere come si comporta $\rho_p(t_{max})$ rispetto alla densità media dell'Universo o, nella terminologia che stiamo usando, rispetto alla densità dell'universo di background (il cui andamento è stato trovato ed è riportato in Tabella 2.1 al termine della Sezione 2.2), questa nel massimo vale

$$\rho(t_{max}) = \frac{1}{6\pi G} t_{max}^{-2}$$

Definiamo allora il rapporto tra la densità all'interno della perturbazione rispetto a quella dell'universo di background, $\chi(t_{max})$

$$\chi(t_{max}) := \frac{\rho_p(t_{max})}{\rho(t_{max})} = \frac{9\pi^2}{16} \approx 5.6$$

Per la definizione di $\delta := (\rho_p - \rho)/\rho = \chi - 1$ allora

$$\delta(t_{max}) = \chi - 1 \approx 4.6$$

ovvero, **al turn-around time la perturbazione è già non lineare.**

Viene da chiedersi che valore avremmo ottenuto con la trattazione lineare. In teoria lineare $\delta \propto t^{2/3}$ e quindi la soluzione crescente δ_+ si scrive

$$\delta_+(t_{max}) = \delta_+(t_i) \left(\frac{t_{max}}{t_i} \right)^{2/3} = \frac{2}{3} \delta_i \left[\frac{\pi}{2H_i} \frac{3H_i}{2} \left(\frac{\rho_{crit}(t_i)}{\rho_p(t_{max})} \right)^{1/2} \right]^{2/3} = \frac{3}{5} \frac{\delta_i \Omega_p^{2/3}}{\delta_i} \left(\frac{3\pi}{4} \right)^{2/3}$$

$$\delta_+(t_{max}) = \frac{3}{5} \left(\frac{3\pi}{4} \right)^{2/3} \approx 1.07$$

In questa fase, in cui il collasso non è ancora cominciato, la soluzione lineare già differisce di un fattore 4 dalla soluzione ottenuta **analiticamente** con la teoria non lineare. Questo evidenzia l'importanza di sviluppare una teoria non lineare efficiente, ma anche quanto la perturbazione si discosti dal regime lineare.

Vediamo allora come evolve la perturbazione dal turn-around time in poi.

11.1.1 Fase di Collasso e Virializzazione

Al contrario di quanto avevamo supposto per universi chiusi, una perturbazione del tipo descritto non collassa in un punto al tempo $2t_{max}$ (Big-Crunch). Se la materia che la compone è collisionale, infatti, all'aumentare della densità tende a riscaldarsi e raggiungere l'equilibrio, grazie all'aumento della pressione che può opporsi al collasso gravitazionale. Quindi per la materia barionica il collasso si ferma quando termalizza. Per quanto riguarda la materia oscura invece, pur non essendo collisionale, ha una sua dispersione di velocità che farà raggiungere anche a questa una situazione di equilibrio in cui il collasso si ferma.

Le simulazioni mostrano (Figura 11.3) che una perturbazione smette di collassare, raggiungendo una dimensione fisica di equilibrio R_e , quando $t_e = 2t_{max}$. Trascorso questo tempo comincia a stabilizzarsi oscillando intorno alla dimensione di equilibrio fino a virializzare a

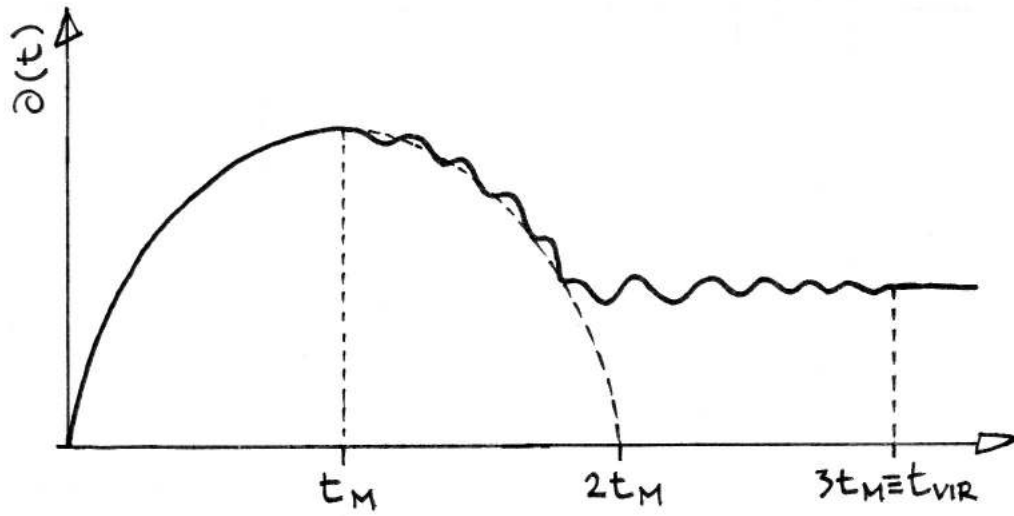


Figura 11.3: *Evoluzione del fattore di scala della perturbazione.*

$t_{vir} = 3t_{max}$ (questo non ci stupisce poiché sappiamo che le galassie e gli ammassi sono sistemi virializzati). Tra t_e e t_{vir} la perturbazione mantiene le stesse caratteristiche invariate, oscillando intorno ai valori di equilibrio. Questo ci consente di determinare le caratteristiche della perturbazione in t_e , poiché infatti il

Teorema del Viriale afferma che *la somma di energia potenziale totale e di due volte l'energia cinetica di un sistema è uguale a zero*:

$$2T + V = 0$$

Se l'energia totale è $E = T + V$ allora in un sistema virializzato

$$E = \frac{V}{2} = -T$$

Possiamo quindi calcolarci l'energia totale della perturbazione nei diversi momenti (senza dimenticare che solo $\frac{3}{5}$ del totale va nei modi crescenti):

$$E_{tot}(t_e) = E_{tot}(t_{vir}) = \frac{V}{2} = -\frac{1}{2} \frac{3}{5} \frac{GM^2}{R_e}$$

Per quanto riguarda il massimo invece, abbiamo che per un istante l'energia cinetica totale è nulla, quindi l'energia del sistema è data dalla sola energia potenziale

$$E_{tot}(t_{max}) = V = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R_{max}}$$

Poiché assumiamo che la perturbazione cresca in maniera adiabatica abbiamo $E_{tot}(t_e) = E_{tot}(t_{max})$ e perciò

$$R_{max} = 2R_e \approx 2R_{vir}$$

La perturbazione si stabilizza su un raggio che è circa la metà il raggio che aveva nel massimo. Poiché conosciamo le dimensioni del nostro universo in miniatura possiamo calcolarcene la densità, $\rho \propto R^{-3}$. Al tempo in cui si instaura l'equilibrio essa vale

$$\rho_p(t_e) \propto (R_e)^{-3} = \left(\frac{R_M}{2}\right)^{-3} = 8(R_M)^{-3} = 8\rho_p(t_M)$$

$$\rho_p(t_e) \propto 8\rho_p(t_M)$$

che, per quanto detto, è uguale al valore che avrà quando si instaura il regime viriale

$$\rho_p(t_{vir}) = \rho_p(t_e) \propto 8\rho_p(t_M)$$

La differenza tra t_e e t_{vir} non è nella perturbazione ma nell'universo di background, in questo lasso di tempo si sarà infatti espanso diminuendo la propria densità. Tra i due tempi ci sarà un aumento nel rapporto tra la densità della perturbazione e quella del background (ricordando che nel massimo abbiamo definito $\chi = 5.6$):

$$\begin{aligned} \bullet \quad \frac{\rho_p(t_e)}{\rho(t_e)} &= 8 \frac{\rho_p(t_M)}{\rho(t_M)} \left(\frac{t_e}{t_M}\right)^2 = 8\chi \left(\frac{t_e}{t_M}\right)^2 \\ \frac{\rho_p(t_e)}{\rho(t_e)} &\approx 2^2 8\chi \approx 180 \end{aligned} \tag{11.14}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \frac{\rho_p(t_{vir})}{\rho(t_{vir})} &= 8 \frac{\rho_p(t_M)}{\rho(t_M)} \left(\frac{t_{vir}}{t_M}\right)^2 = 8\chi \left(\frac{t_{vir}}{t_M}\right)^2 \\ \frac{\rho_p(t_{vir})}{\rho(t_{vir})} &\approx 3^2 8\chi \approx 400 \end{aligned} \tag{11.15}$$

Usando la teoria lineare, poiché $\delta_+(t_i) = \frac{3}{5}\delta_i \propto \frac{3}{5}a \propto \frac{3}{5}t^{2/3}$, avremmo

$$\begin{aligned} \delta_+(t_e) &= \delta_+(t_i) \left(\frac{t_e}{t_i}\right)^{2/3} = \delta_+(t_{max}) \left(\frac{t_e}{t_{max}}\right)^{2/3} = \frac{3}{5} \left(\frac{3\pi}{4}\right)^{2/3} \left(\frac{t_e}{t_{max}}\right)^{2/3} \\ \delta_+(t_e) &= 1.07 \cdot 2^{2/3} \approx 1.686 \end{aligned} \tag{11.16}$$

$$\delta_+(t_{vir}) = 1.07 \cdot 3^{2/3} \approx 2.20$$

ben 2 ordini di grandezza inferiori ai valori che abbiamo trovato! Il valore $\delta_+(t_e) = 1.686$ è un numero importantissimo e vedremo più avanti perché. Morale? zitti che semo non lineari! Spicciateve 'si risultadi diversissimi!

In Figura 11.4 sono mostrati gli andamenti della densità dell'universo EdS di background (curva in basso, la soluzione è quella trovata ai tempi..) e quella di una perturbazione sferica (curva in alto, i vari andamenti sono quelli trovati ora). Quando calcoliamo il valore di δ , determiniamo quanto (in un grafico di questo tipo), la curva della fluttuazione sovrasta quella del background. Nella prima fase la densità della fluttuazione decresce, anche se meno velocemente del background, per effetto del flusso di espansione di Hubble; quando viene raggiunto il turn-around time comincia il collasso, la densità aumenta finché non raggiunge un valore costante. Per quanto riguarda il background, la densità diminuisce sempre come

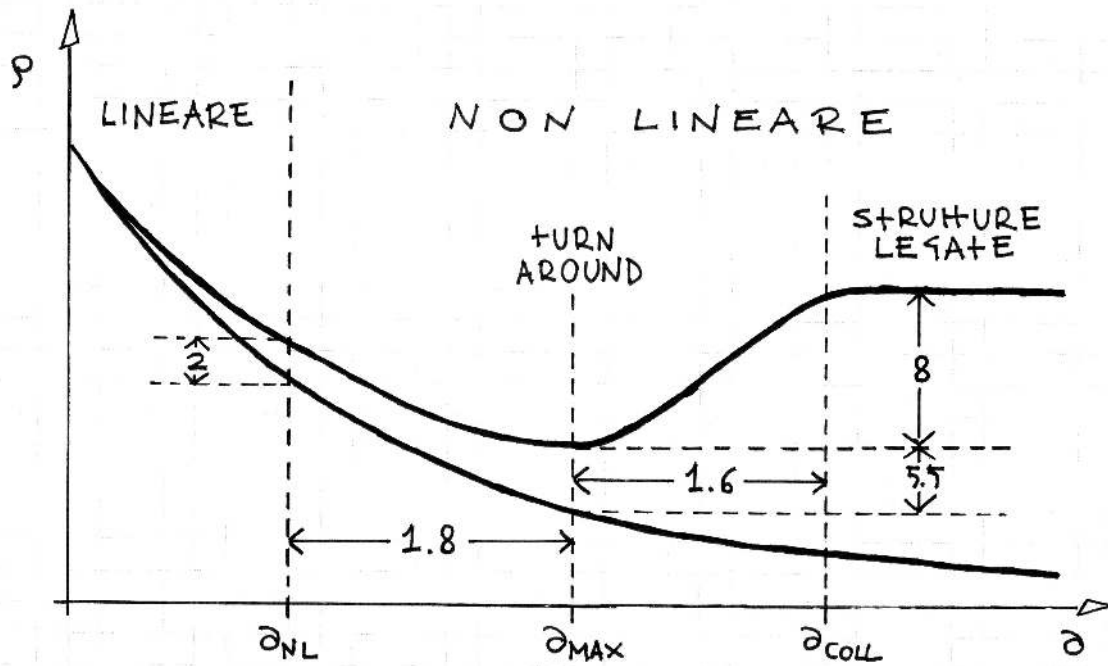


Figura 11.4: Evoluzione della densità della perturbazione e dell'universo di background con il fattore di scala. Sono indicati valori di transizione e differenze tra le due curve.

a^{-3} , questo spiega perché, dopo il turn-around time, si arriva ai valori di $180 \div 400$ visti prima.

Prima di concludere questa Sezione, due osservazioni sul modello:

- le assunzioni iniziali richiedono la sfericità della fluttuazione, che è chiaramente impossibile. Si ottengono però risultati simili assumendo una simmetria ellissoidale ma la matematica si complica.
- abbiamo assunto un universo di background di tipo EdS. Sebbene questo faciliti i conti non costituisce l'unica possibilità. Cambiando il modello di universo però cambiano anche i valori trovati in (11.14) e (11.15). Le perturbazioni evolvono in maniera molto differente in modelli di universo con curvature diverse. I valori ottenuti applicando la teoria lineare invece rimarrebbero molto simili poiché poco dipendenti dalla cosmologia.

11.2 Funzione di Press-Schechter

Vogliamo poter testare i modelli che stiamo sviluppando per l'evoluzione delle strutture cosmiche ma per farlo abbiamo bisogno di collegarli a degli osservabili. Vedremo in questa Sezione che è possibile farlo definendo la **funzione di massa delle strutture cosmiche**

$$n(M) dM$$

che ci dà il numero di oggetti che hanno una massa compresa tra M e $M + dM$ ad un determinato tempo, per unità di volume. Questa funzione potrà essere convertita, nel momento in cui sceglieremo un valore per il rapporto massa su luminosità, M/L , in una

funzione di luminosità che ci permetterà di stabilire il numero di oggetti con una determinata luminosità che è possibile osservare ad un determinato tempo per unità di volume di Universo. Vediamo ora come poter arrivare a questo osservabile.

Per quanto abbiamo visto fino a qui sappiamo che l'Universo nasce con una distribuzione delle fluttuazioni di densità praticamente gaussiana (fatta eccezione per il taglio a $\delta = -1$). Mentre tali fluttuazioni evolvono il picco della distribuzione originale si abbassa e aumenta la larghezza della campana (la varianza della gaussiana cresce). Ragionando in termini di massa anziché in termini di densità (abbiamo già visto cosa comporta questo passaggio), diciamo che per il nostro Universo vale la distribuzione

$$P(\delta_M) d\delta_M = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_M^2}} \exp \left[-\frac{\delta_M^2}{2\sigma_M^2} \right] d\delta_M$$

che rappresenta la probabilità di avere una fluttuazione con massa compresa tra δ_M e $\delta_M + d\delta_M$. In Figura 11.5

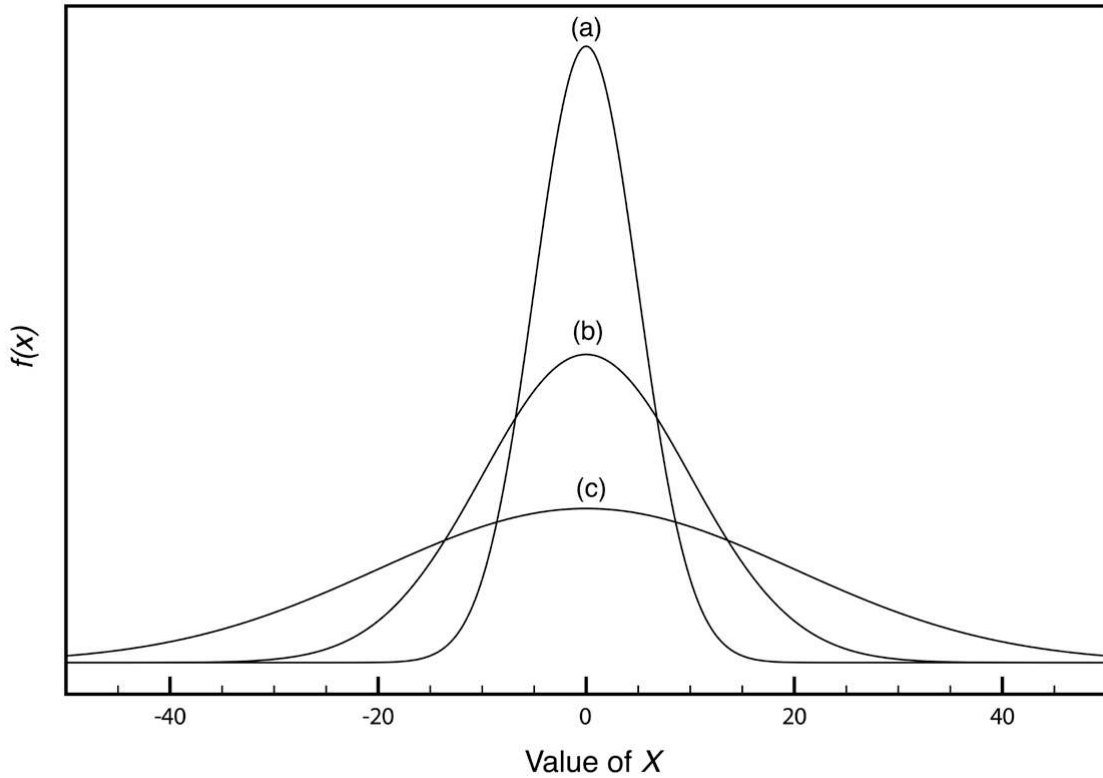


Figura 11.5: *Distribuzione gaussiana (normale), quì $f(x) \equiv P(\delta_M)$ e $x \equiv \delta_M$. I tre casi (a)-(c) rappresentano valori crescenti della varianza σ_M .*

Con il passare del tempo variano i valori di $\delta(t_i) = \delta_i$ e di $\sigma_M(t_i)$ con il modo crescente:

$$\begin{cases} \delta(t) = \delta_i \delta_+(t) \\ \sigma_M^2(t) = \sigma_M^2(t_i) \delta_+^2(t) \end{cases}$$

e la distribuzione rimane gaussiana fintanto che il regime rimane lineare. Cerchiamo ora di calcolare la massa degli oggetti primordiali e per farlo dobbiamo capire quale sia il valore di soglia di $P(\delta_M)$ oltre il quale le strutture si formano. Ci attendiamo che le strutture si

formino laddove la densità è maggiore. Troviamo allora la probabilità che una fluttuazione δ_M superi un certo valore di soglia δ_c :

$$P_{>\delta_c}(M) = \int_{\delta_c}^{+\infty} P(\delta_M) d\delta_M$$

tale quantità è funzione della massa che è in seno alla scala del filtro che usiamo per passare da δ a δ_M (vedi Sezione 10.1.4):

$$\delta_M(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x}) \otimes W(\mathbf{x}, R)$$

dove R è la scala per la quale vale $R \propto M^{1/3}$ (ed ecco da dove spunta la massa).

L'idea della coppia Press & Schechter è di prendere come valore di soglia quello trovato nel modello del collasso sferico che indicava il raggiungimento dell'equilibrio in teoria lineare (equazione (11.16)), poniamo quindi

$$\delta_c = 1.686$$

Supponiamo che tutte le fluttuazioni della distribuzione gaussiana evoluta che ad un determinato tempo hanno $\delta_M > 1.686$ possono collassare e formare delle strutture. Si definisce la **Funzione di Press-Schechter**

$$n(M)M dM = 2\bar{\rho}_M[P_{>\delta_c}(M) - P_{>\delta_c}(M + dM)] \quad (11.17)$$

dove $n(M)$ è la densità numerica di oggetti di massa M (numero di oggetti per unità di volume) e il prodotto $n(M)M$ ci dà la massa totale per unità di volume di tutti gli oggetti di massa M e $\bar{\rho}_M$ la densità media. Il fattore 2 al secondo termine viene qui aggiunto “manualmente” (anche se da una derivazione meno grossolana della formula uscirebbe naturalmente) per risolvere il problema del **cloud in cell**. Se assumiamo $M \rightarrow 0$ avremmo che la scala anche la scala del filtro sarebbe $R \rightarrow 0$, in tale maniera riotterremo il campo non filtrato ovvero avremmo

$$\sigma_M \xrightarrow{M \rightarrow 0} \infty$$

Il cloud in cell problem nasce perché agendo in questo modo otterremmo

$$P_{>\delta_c} = \frac{1}{2} \neq 1$$

Ovvero, facendo tendere la massa delle strutture che voglio contare a zero, la probabilità di superare la soglia critica per la perturbazione corrispondente dovrebbe corrispondere alla probabilità totale, 1 per l'appunto.

Comunque con questa correzione la Press-Schechter funziona molto bene. Lavoriamo quindi un po' di algebra sulla (11.17), in particolare la parentesi quadra può essere scritta

$$[P_{>\delta_c}(M) - P_{>\delta_c}(M + dM)] = |dP_{>\delta_c}| = \left| \frac{dP_{>\delta_c}}{d\sigma_M} \right| \cdot \left| \frac{d\sigma_M}{dM} \right| dM$$

dove

$$\left| \frac{d P_{>\delta_c}}{d \sigma_M} \right| = P(\delta_M) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_M^2}} \frac{\delta_c}{\sigma_M} \exp \left[-\frac{\delta_c^2}{2\sigma_M^2} \right]$$

sostituendo nella (11.17) abbiamo quindi

$$n(M) dM = 2 \frac{\bar{\rho}_M}{\sqrt{2\pi\sigma_M^2}} \frac{\delta_c}{\sigma_M} \exp \left[-\frac{\delta_c^2}{2\sigma_M^2} \right] \left| \frac{d \sigma_M}{d M} \right| dM$$

L'ultima si riscrive in forma più elegante ed ordinata

$$n(M, z) dM = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\delta_c}{\sigma_M(z)} \frac{\bar{\rho}_M(z)}{M^2} \left| \frac{d \ln \sigma_M}{d \ln M} \right| \exp \left(-\frac{\delta_c^2}{2\sigma_M^2(z)} \right) dM \quad (11.18)$$

In questa equazione sono contenute tutte le formule cosmologiche: $\bar{\rho}_M(z)$ contiene l'informazione su Ω_M , le altre dipendenze sono contenute in $\sigma_M(M, z) = \sigma_M(M, z=0)\delta_+(z)$ ovvero, poiché,

$$\sigma_M^2 \propto \int P(k) k^2 W^2(\mathbf{k}, R) d^3\mathbf{k}$$

nello spettro di potenza $P(k)$, e nel filtro $W(\mathbf{k}, R)$. La forma della funzione di massa (11.18) sarà quindi quella di una legge di potenza (a meno di vari fattori), con un taglio esponenziale da un certo valore in poi. Il valore $\delta_c = 1.686$ è stato trovato usando il modello EdS, ma la sua dipendenza dal modello di Universo è estremamente debole, dipende poco dalla cosmologia perché poco vi dipende $P(k)$ (al contrario dei valori trovati con la teoria non lineare del collasso sferico, $\delta_+(t_e) = 180$ e $\delta_+(t_{vir}) = 400$ dipendono moltissimo dal modello cosmologico).

Riassumendo dunque abbiamo assunto

- distribuzione gaussiana delle fluttuazioni, assunzione supportata dal modello inflazionario;
- collasso sferico di una perturbazione, dalla teoria lineare abbiamo trovato il valore di soglia $\delta_c = 1.686$;
- teoria lineare di evoluzione delle perturbazioni, poiché in regime lineare una distribuzione gaussiana resta tale.

Da queste assunzioni siamo arrivati alla (11.18), funzione di Press-Schechter dipendente dalla cosmologia.

Vogliamo ora vedere come evolve la funzione di massa con il tempo, in primis riscriviamo la (11.18). Assumiamo semplicisticamente di avere uno spettro di potenza del tipo

$$P(k) \propto k^n \quad (11.19)$$

dove l'indice sarebbe in realtà $n = n(k)$ e lo spettro come in Figura 11.6, nel primo tratto sale come $n = 1$ per poi passare dolcemente a decrescere come $n = -3$.

Con uno spettro del tipo di quello della (11.19) la varianza si riscrive

$$\sigma_M = \left(\frac{M}{M_0} \right)^{-\alpha}$$

con $\alpha = (n+3)/6$, come abbiamo calcolato in precedenza, da questa risulta

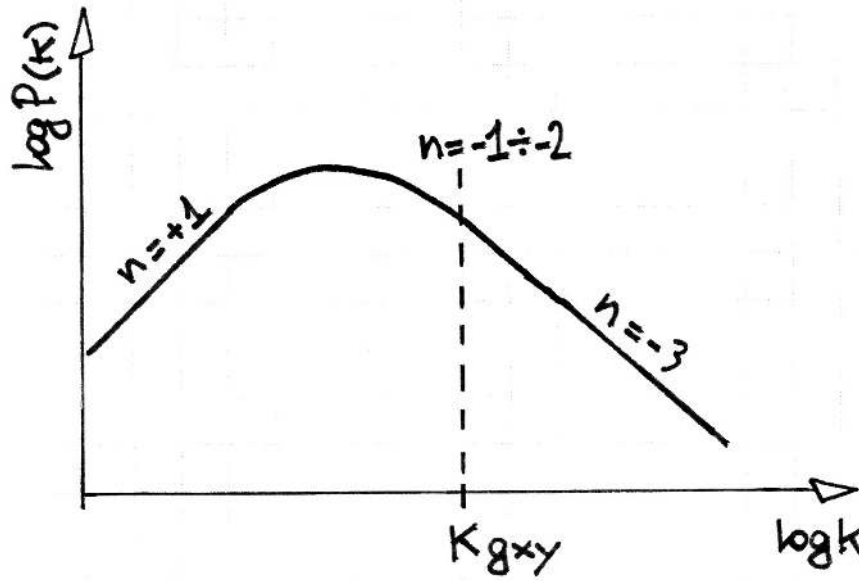


Figura 11.6: Andamento dello spettro di potenza delle perturbazioni dopo l'equivalenza.

$$\left| \frac{d \sigma_M}{d M} \right| = \alpha \frac{\sigma_M}{M}$$

con la quale il termine di derivata logaritmica in (11.18) diventa

$$\frac{d \ln \sigma_M}{d \ln M} = \frac{M}{\sigma_M} \frac{d \sigma_M}{d M} = \alpha$$

Possiamo quindi riscrivere la funzione di massa come

$$n(M) dM dM = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\delta_c}{(M/M_0)^{-\alpha}} \frac{\alpha \bar{\rho}_M}{M^2} \exp\left(-\frac{\delta_c}{2(M/M_0)^{-2\alpha}}\right) dM$$

e poniamo $M_* = M_0 \left(\frac{2}{\delta_c^2}\right)^{1/2\alpha}$, una massa caratteristica (sono tutte costanti), così che otteniamo

$$n(M) dM = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\alpha \bar{\rho}_M}{M_*^2} \left(\frac{M}{M_*}\right)^{\alpha-2} \exp\left[-\left(\frac{M}{M_*}\right)^{2\alpha}\right] dM \quad (11.20)$$

questa è la versione più usata della **funzione di massa di Press-Schechter** ed è analoga alla funzione di Schechter alla quale si è accennato all'inizio del Capitolo 3. In Figura 11.7 una rappresentazione schematica della (11.20).

Come dicevamo la funzione di massa è analoga alla funzione di luminosità di Schechter infatti, assumendo un rapporto massa su luminosità costante

$$\frac{M}{L} = \text{cost}$$

si può legare $n(M) dM$ alla luminosità:

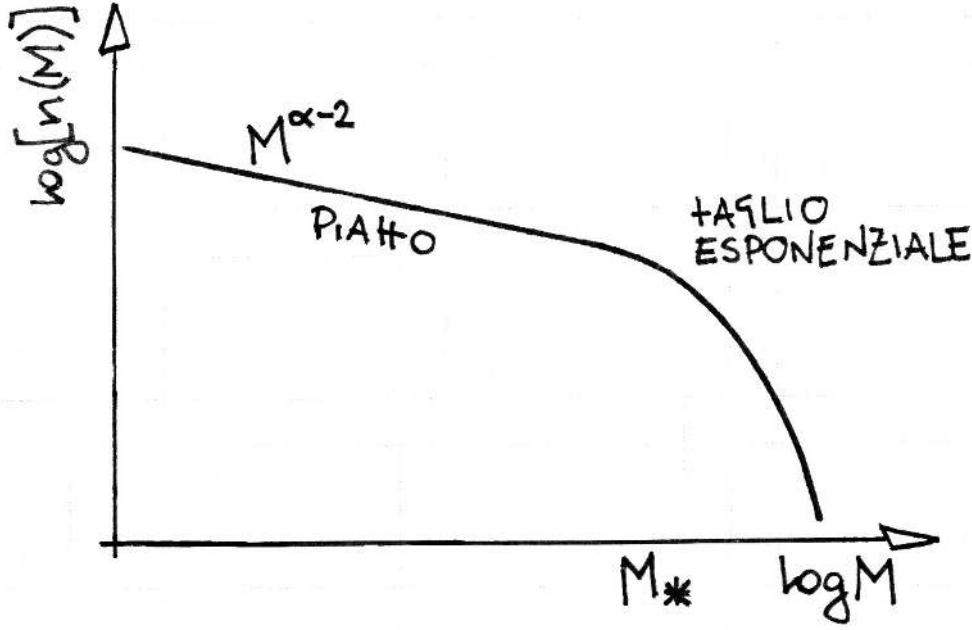


Figura 11.7: Funzione di Press-Schechter in scala logaritmica, è indicata la massa caratteristica M_* e sono evidenziati i due diversi andamenti.

$$\Phi(L) = n(M) \frac{dM}{dL}$$

le due funzioni di luminosità e di massa hanno esattamente la stessa forma.

La funzione di luminosità dipende da tre parametri:

$$\Phi(L) = AL^\beta \exp\left(-\frac{L}{L^*}\right)$$

dove A è la normalizzazione, β la pendenza e L_* la luminosità del ginocchio (dove si passa dal regime power-law a quello esponenziale). Dunque la funzione di Schechter trova una giustificazione teorica nella funzione di massa di Press-Schechter³.

Tipicamente l'indice della legge di potenza è $\beta \approx -1$, andando a confrontare con la (11.20) abbiamo $\beta = \alpha - 2 = -1$ e quindi $\alpha = +1$ ma questo valore, per il legame $\alpha = \frac{n+3}{6}$, vorrebbe dire un indice spettrale $n = +3$. Basta confrontare il valore trovato con la Figura 11.6 per capire che c'è qualqualcosa che non va. Gli indici spettrali ammessi per lo spettro di potenza spaziano infatti nell'intervallo $+1 \div -3$ (in figura ad esempio è evidenziato che per la scala k_{gxy} , corrispondente alle dimensioni tipiche delle galassie, l'indice è $n = -1 \div -2$). I motivi per i quali questo succede sono vari: la luminosità che non è un tracciante veritiero della massa delle galassie, lo scenario del downsizing, il fatto che non esista una relazione lineare ed universale tra le dimensioni di un alone di DM e la massa luminosa ad esso associata, sono tutti fattori che concorrono a creare questa incongruenza.

Il problema alla base di tutto è che i barioni sono collisionali e quindi non è corretto assumere il rapporto massa su luminosità come costante quando parliamo di galassie.

³Venne prima formalizzata la Press-Schechter in ambito cosmologico, il buon Schechter poi la applicò anche in astrofisica extragalattica per studiare la distribuzione delle galassie, così nacque la funzione di luminosità di Schechter, e la vita va avanti...

Questo non accade però per gli ammassi di galassie, le cui buche di potenziale sono tali da risentire in misura molto minore dell'energetica dei barioni (ad esempio l'energia eiettata dalle super novae non è sufficiente ad intaccare sensibilmente la fisica su grande scala di un ammasso).

Al fine di studiare la distribuzione della materia nell'Universo su grande scala non possiamo quindi fare affidamento sulla funzione di luminosità di Schechter ma dobbiamo affidarci ad altri metodi. Esistono svariate relazioni non lineari che legano la massa degli ammassi di galassie a degli osservabili: la loro luminosità X , la temperatura, la dispersione di velocità degli oggetti al loro interno (le galassie), l'effetto Sunyaev-Zel'dovich.

Terminata questa digressione sulle analogie con la funzione di Schechter riprendiamo il discorso, andando a vedere come evolve la funzione di massa. Consideriamo la (11.20), in questa forma è evidente quanto dicevamo prima: la funzione è una legge di potenza che ad una **massa caratteristica** M_* subisce un taglio esponenziale. La massa M_* è la massa caratteristica che si forma ad un dato tempo t , questa quantità dipende dalla varianza di massa e poiché con il tempo $\sigma_M \nearrow$ allora anche $M_* \nearrow$. Quindi con il trascorrere del tempo nell'Universo si formano strutture sempre più massicce, il cut-off si sposta a masse sempre maggiori.

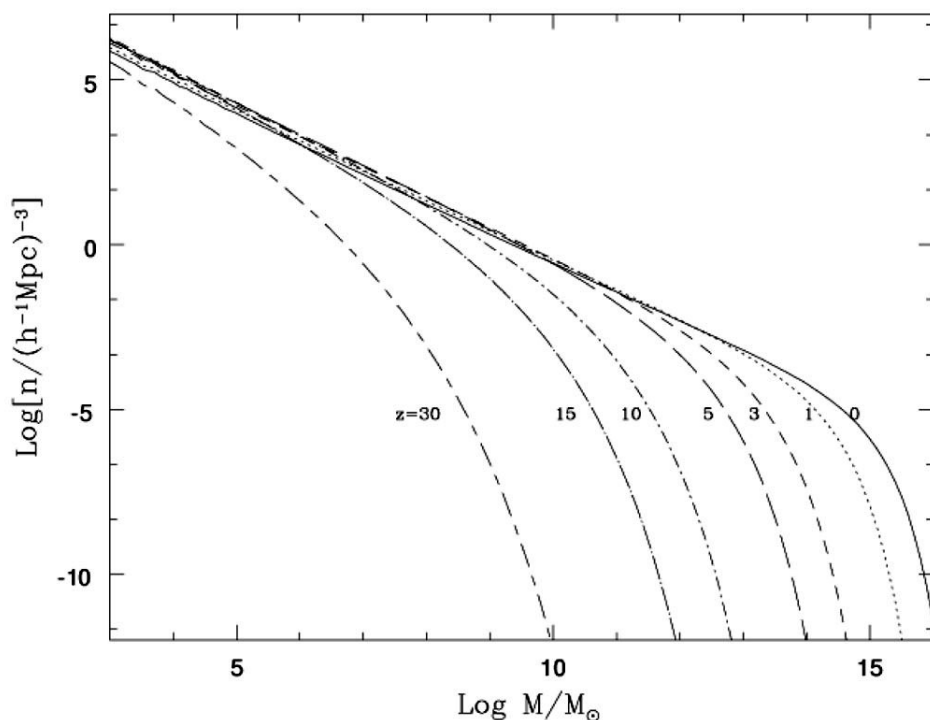


Figura 11.8: *Funzione di Press-Schechter in scala logaritmica, sono presentati diversi andamenti al variare del redshift. Al diminuire di z il ginocchio si sposta a masse sempre maggiori, la parte a legge di potenza varia invece poco con il redshift.*

In Figura 11.8 è rappresentata la funzione di Press-Schechter a redshift diversi e si vede ad esempio che M_* viene dell'ordine di $10^{15} M_\odot$, cioè la massa di un tipico ammasso di galassie, ciò significa che contare il numero degli ammassi di galassie nell'Universo di oggi equivale a contare quanta massa è contenuta nella coda esponenziale della funzione di massa. Contare il numero di oggetti presenti in queste code permette di stimare alcuni parametri cosmologici. Ci si concentra principalmente sugli oggetti che si trovano sulle code per due

motivi principalmente, il primo e meno importante è che alle masse piccole ho oggetti che emettono poco ed è quindi difficile individuare. Ma la vera ragione per la quale mi interesso agli oggetti nelle code è che queste sono estremamente più sensibili al modello cosmologico e quindi, nonostante le grandi barre d'errore nei dati (per la poca statistica), contare gli oggetti in queste regioni della funzione di massa è più utile che farlo a masse piccole. La posizione del ginocchio, e quindi della coda esponenziale, abbiamo detto dipende dalla varianza, questa si scrive

$$\sigma_M^2 = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{+\infty} P(k)k^2 W(k, R) dk = \frac{A}{2\pi^2} \int_0^{+\infty} k^{n+2} T^2(k) W(k, R) dk$$

con $P(k) = Ak^n T^2(k)$ è lo spettro di potenza ad un determinato tempo, $T(k)$ è la funzione di trasferimento e varia a seconda che si assuma HDM o CDM, ma poiché l'integrale è in dk , la varianza risente poco dell'influenza di questo termine. Risente poco anche della variazione dell'indice spettrale n , poiché stiamo integrando da 0 a $+\infty$. Il vero termine che da una variazione forte e chiara è la normalizzazione A dello spettro che è un valore costante ad un determinato tempo e rappresenta l'ampiezza delle perturbazioni. Ragionando in teoria lineare, con la quale la distribuzione delle perturbazioni è gaussiana, è ovvio che maggiore è il valore della varianza σ_M^2 maggiore è il numero di oggetti che viene a trovarsi oltre il valore fissato $\delta_c = 1.686$ e questo significa che la massa disponibile per il collasso è maggiore. Lo stesso risultato può però essere ottenuto se la massa presente nell'Universo fosse maggiore. Il conteggio delle strutture permetterebbe quindi di fare cosmologia, poiché consente di fissare due parametri fondamentali, cioè la densità di materia ρ_M (e di conseguenza Ω_M) e l'ampiezza delle perturbazioni. Purtroppo però questi due parametri sono **degeneri**, si dice solitamente che è degenerare la quantità $\sigma_8 \Omega_{0,M}^{0.5}$, ovvero con combinazioni diverse di σ_8 e $\Omega_{0,M}$ possiamo arrivare alla stessa quantità di massa totale per $k > 1.686$, il valore di soglia⁴.

In ogni caso, contare gli ammassi di galassie pone dei vincoli sull'ampiezza delle perturbazioni e sul parametro di densità dell'Universo. Inoltre contando questo numero a redshift diversi permette di fare speculazioni sul modello cosmologico, infatti all'aumentare di z avremo sempre meno oggetti di grande massa, il valore della massa al cut-off M_* diminuisce. L'entità della variazione di M_* dipende solo dal modello cosmologico, entra in gioco infatti il **fattore di crescita**: gli universi aperti evolvono meno rapidamente degli universi piatti che evolvono a loro volta meno rapidamente di quelli chiusi. È quindi il conteggio degli ammassi a redshift diversi che ci permette di rompere la degenerazione tra Ω_M e σ_M :

- dal conteggio degli ammassi oggi otteniamo un valore per $\sigma_8 \Omega_{0,M}^{0.5}$;
- rieffettuando il conteggio a redshift maggiore ci fa porre dei vincoli su σ_8 e $\Omega_{0,M}$ separatamente.

Osservazioni sulla funzione di massa:

⁴Con σ_8 si intende il valore di σ normalizzato ad un valore "sciocco", in una scala di $8h^{-1}Mpc$:

$$\sigma_8^2 := \frac{1}{2\pi^2} \int P(k)k^2 W^2(R = 8h^{-1}Mpc) dk$$

. Questo valore veniva usato prima di misurare le fluttuazioni nella CMB, ha quindi motivi storici ed è sopravvissuto per una coincidenza. Calcolando la media della distribuzione delle galassie entro un raggio di $8Mpc$ la varianza viene uguale ad uno: $\sigma_8^2(z=0) = 1$. Quando poi vennero misurate le fluttuazioni nella CMB si iniziarono ad utilizzare quelle per fissare la normalizzazione A dello spettro di potenza, ma il valore σ_8 è ancora alle volte usato oggi poiché finché non fissiamo un modello cosmologico non ci cambia niente.

- l'assunzione di perturbazioni esattamente sferiche (modello del collasso sferico) è un'assunzione molto forte, infatti, sebbene può funzionare per perturbazioni di piccola etità nelle quali la pressione interna, ovvero la dispersione di velocità delle particelle, è tale da riuscire a sostenere una simmetria sferica, aumentando le dimensioni la deviazione dalla forma sferica diventa mano a mano maggiore, è molto improbabile che siano sferiche. Buona parte del lavoro di correzione fatto sulla funzione di Press-Schechter è stato quello di implementare il collasso ellissoidale, in questo modo si ottengono funzioni di massa molto più affidabili, al punto che ora sono utilizzate le funzioni di massa ottenute dalle simulazioni numeriche per testare i modelli cosmologici.
- La stima della massa dei singoli oggetti è molto difficile, si arriva infatti anche ad errori del 50% (parliamo di oggetti reali osservati e della conversione tra gli osservabili e la massa). Nonostante questo però, poiché lavoriamo con la coda esponenziale della funzione di massa che dipende principalmente dal modello cosmologico assunto, e quindi dai parametri cosmologici inseriti, il fit riesce bene ed errori grandi nei conteggi non inficiano molto nei risultati. Questo è il motivo per cui è possibile utilizzare l'osservazione degli ammassi di galassie per fare cosmologia di precisione, nonostante i limiti nelle conversioni osservabili-massa.

Per maggiori informazioni sulla funzione di massa si suggeriscono due articoli:

- “Mo, Jing & Böner” per esempi di funzioni di massa;
- “Sheth & Tormen”, *Large scale bias & the peak background split*, per considerazioni sulla possibilità di migliorare il modello.

11.3 Simulazioni Numeriche

Per seguire l'evoluzione delle perturbazioni in regime pienamente non lineare si utilizzano delle tecniche numeriche. Lo scopo finale è quello di ottenere una rappresentazione della distribuzione delle strutture su grande scala:

- ammassi di galassie;
- filamenti;
- vuoti.

che rappresenti al meglio quella reale osservata (Figura 11.9).

Le simulazioni si basano su mappe di temperatura di partenza (possiamo ad esempio prendere la mappa della CMB o usare delle distribuzioni delle anisotropie random come dettato dalla teoria lineare) come quella in Figura 11.10, dalle quali si ricava la distribuzione delle fluttuazioni di densità che vengono poi fatte evolvere per evolvere nel tempo per arrivare alla distribuzione su grande scala attuale.

Assumendo modelli cosmologici diversi l'evoluzione porta a risultati diversi (Figura 11.11) che vanno poi confrontati con le osservazioni. In figura si può vedere il risultato di simulazioni con modelli cosmologici diversi, sebbene le strutture che si formano siano nella stessa posizione appaiono più o meno marcate a seconda che si prendano modelli cosmologici monocomponente tipo EdS (in alto) o a più componenti(in basso).

Quindi per modellare l'evoluzione su grande scala dell'Universo si possono seguire diverse strade. Si possono utilizzare **modelli analitici**, che partendo da assunzioni semplificative

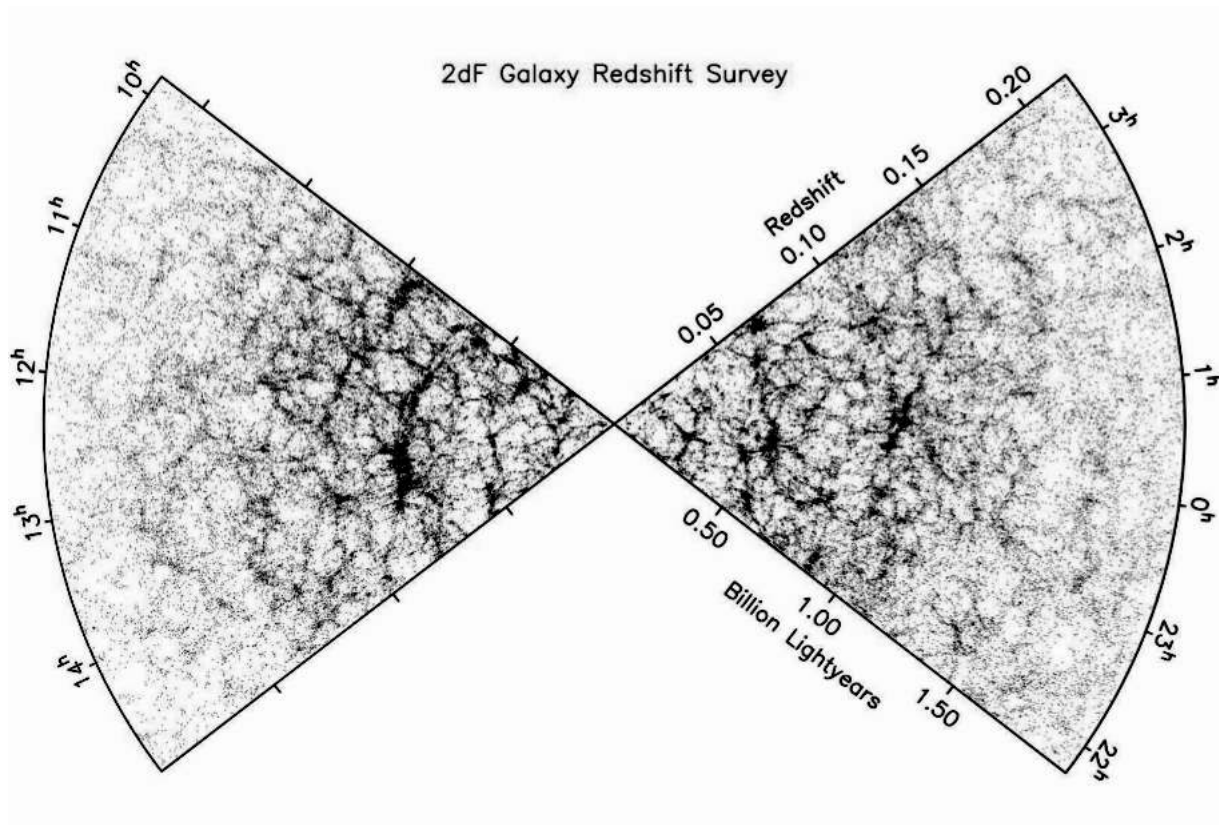


Figura 11.9: *Rappresentazione bidimensionale (la declinazione è proiettata) della distribuzione su grande scala degli oggetti nell'Universo. Qui è rappresentato un volume non troppo grande (arriva fino a $z \sim 0.2$) ma si può comunque vedere che la distribuzione presenta filamenti e vuoti e che c'è un'evoluzione con il redshift.*

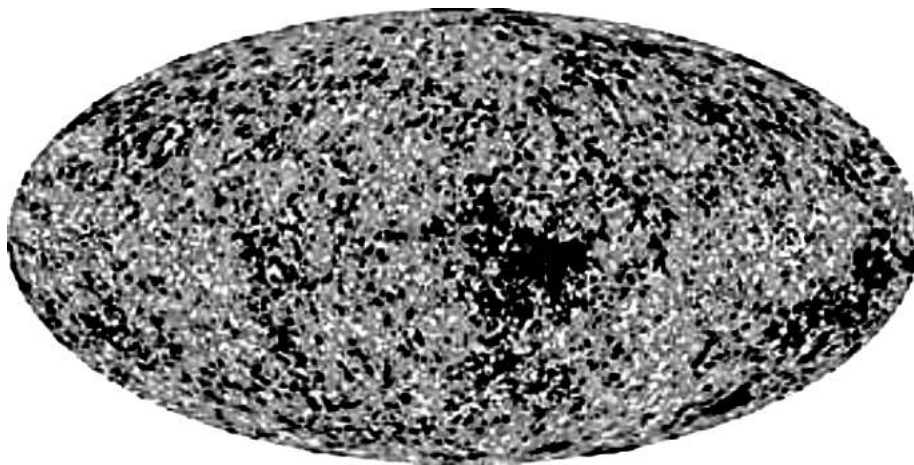


Figura 11.10: *Possibile distribuzione in temperatura di partenza di una simulazione.*

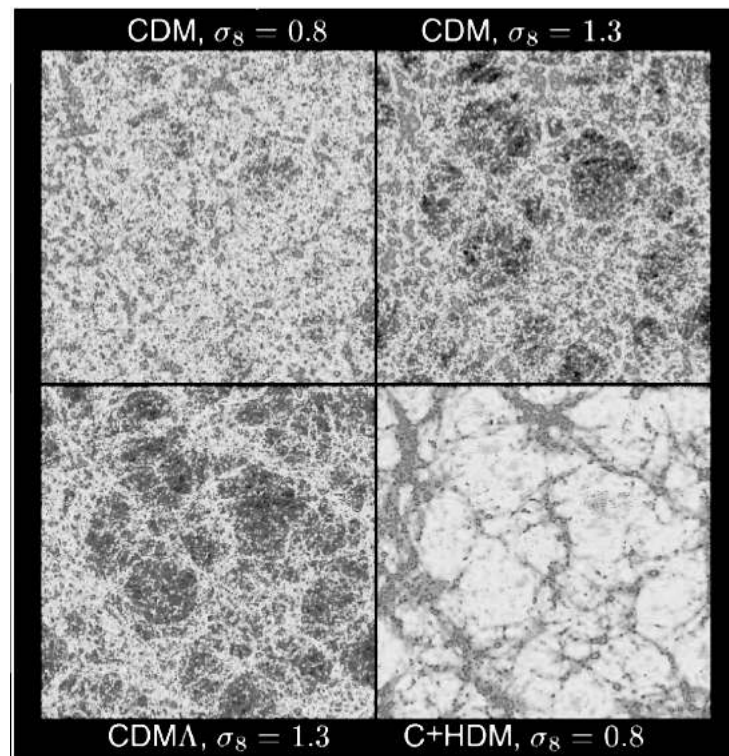


Figura 11.11: Risultati della stessa simulazione per modelli cosmologici diversi che sono stati fatti evolvere per lo stesso lasso di tempo. Si notino le evidenti differenze delle varie mappe.

hanno applicazioni limitate. I **modelli semi-analitici** sfruttano dei set di parametri liberi da fissare in maniera tale da riprodurre le osservazioni. La metodologia di gran lunga più utilizzata ed affidabile è però la creazione di **simulazioni numeriche** per le quali le principali difficoltà si hanno in termini dell'efficienza della CPU. Queste simulazioni devono essere in grado di modellare molti processi e che non sono esclusivamente l'evoluzione non lineare delle perturbazioni:

- la crescita degli aloni di materia oscura attraverso merging;
- la dinamica del raffreddamento del gas;
- la conseguente formazione di stelle da nubi di gas raffreddato;
- l'evoluzione chimica e spettrofotometrica delle popolazioni stellari;
- il conseguente feedback energetico delle stelle e degli AGN e l'evoluzione delle proprietà dell'ISM;
- la formazione delle galassie da eventi di merging consecutivi.

Per riprodurre la distribuzione osservata delle galassie e degli ammassi (Figura 11.9) tutti questi fenomeni devono essere presi in considerazione da un buon codice cosmologico.

Tali processi però agiscono su scale e tempi differenti, infatti non sono dovuti esclusivamente alla gravità che invece non presenta scale privilegiate (insistiamo nel ribadire che se l'unica interazione della materia fosse quella gravitazionale non avremmo differenze né visive né fisica tra un ammasso di galassie ed un ammasso globulare nonostante ci siano più di 10 ordini di grandezza di differenza). Un buon codice dovrà quindi tenere conto principalmente di

- **gravità**, l'implementazione della quale viene fatta usando **codici ad N-corpi** che possono essere di tipi differenti (somma diretta, codici ad albero, particle-mesh..) ognuno con dei pro e dei contro che vedremo;
- **idrodinamica**, si utilizzano codici idrodinamici per modellare l'evoluzione del gas (inclusi gli shock) e anche di questi le tipologie sono svariate (a griglia, a griglia adattiva, schemi di cattura di shock, SPH,..);

possibilmente entrambe queste tipologie di codice devono agire contemporaneamente, per poter ottenere risultati affidabili. Vorremmo inoltre che i nostri codici numerici riproducano tutta una serie di fenomeni che noi osserviamo nelle galassie e negli ammassi e che in diversa misura vanno ad influenzarne la dinamica: raffreddamento e perdite radiative (sia per gas primordiale che per gas arricchito in metalli), formazione stellare (in maniera non risolta, se ne fa una descrizione semplificata o si utilizzano modelli con sotto-griglie et al.), energetica, cinetica e quant'altro riguarda i fenomeni di feedback (ancora solo parzialmente compresi), AGN, lobi radio e bubbles, raggi cosmici da shock, campi magnetici, turbolenza, conduzione termica e chi più ne ha più ne metta. Ognuno di questi fenomeni comporta una complicazione che dal punto di vista numerico non è facile da tenere sotto controllo.

11.4 Simulazioni N-Body

Il paradigma di formazione delle strutture cosmiche, come abbiamo visto in precedenza, è tutto basato sulle instabilità gravitazionali e può essere simulato in maniera affidabile sia per la materia oscura che per quella barionica (anche se in questo secondo caso è necessario trascurare la microfisica). Si studia la formazione degli aloni di dark-matter con l'assunzione che la materia barionica sia da questa influenzata e venga accresciuta in un secondo momento seguendo dalle buche di potenziale già formate dalla DM. Solo in un secondo momento ci si preoccupa del comportamento del gas (processi di raffreddamento e feedback).

La gravità è guidata da due equazioni fondamentali che sono l'**equazione di Eulero**, (11.21), e l'**equazione di Poisson**, (11.22):

$$\frac{d\mathbf{v}_i}{dt} + 2\frac{\dot{a}}{a}\mathbf{v}_i = -\frac{1}{a^2}\nabla\phi = -\frac{G}{a^3}\sum_{i,j\neq i}m_j\frac{\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|^3} = \frac{\mathbf{F}_i}{a^3} \quad (11.21)$$

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\bar{\rho}(t)a^2\delta = \frac{3}{2}H_0^2\Omega_0\frac{\delta}{a} \quad (11.22)$$

in coordinate comoventi. Nella forma (11.21) l'equazione di Eulero tiene conto della sola forza gravitazionale e trascura tutte le altre. A queste va aggiunta l'equazione di conservazione della massa, ovviamente, e quindi il sistema risolutivo è essenzialmente lo stesso usato in teoria non lineare.

I codici N-body non fanno altro che risolvere numericamente questo sistema di equazioni differenziali discretizzando il problema in N particelle, appunto gli N-corpi, ognuna con massa M_i che solitamente viene presa uguale per tutte ma non è detto. Come sappiamo il problema degli N-corpi non ha soluzioni analitiche quando $N > 3$. Il sistema di equazioni da risolvere per risolvere un problema ad N-corpi è il seguente:

$$\begin{cases} F_i = GM_i \sum_{j \neq i} \frac{M_j}{r_{ij}^2} \\ \frac{d v_i}{d t} = \frac{F_i}{M_i} \\ \frac{d x_i}{d t} = v_i \end{cases} \quad (11.23)$$

dove la prima equazione è la definizione di forza gravitazionale sentita dalla particella i -esima e data dal contributo di tutte le altre $N - 1$ particelle. La seconda equazione è la definizione di accelerazione (seconda principio di Newton) e la terza è la definizione di velocità.

Il codice N-body procede ad un'integrazione numerica nel tempo, anch'esso discretizzato. Il primo passo è il calcolo degli F_i , dopodiché vengono calcolate anche le accelerazioni e le velocità delle diverse particelle:

$$v_i(t + \Delta t) = v_i(t) + \frac{F_i}{M_i} \Delta t + O(\Delta t^2)$$

,

$$x_i(t + \Delta t) = x_i(t) + v_i \Delta t + O(\Delta t^2)$$

(metodo di Eulero). In sostanza dopo il calcolo della forza i -esima, velocità e posizione delle N particelle vengono aggiornate attraverso l'integrazione delle seconde due equazioni del sistema (11.23), rispettivamente e in quest'ordine.

Tutti i metodi N-body funzionano pressappoco allo stesso modo per quanto riguarda l'aggiornamento di velocità e posizione. La grossa differenza sta nel modo in cui viene calcolata la forza. Una volta che abbiamo la forza la utilizziamo per aggiornare la velocità, poi usiamo quest'ultima per aggiornare la posizione: ripetere finché non si raggiunge il tempo massimo stabilito (o altre condizioni di uscita dal loop). Vediamo ora diversi metodi utilizzati in cosmologia per calcolare il tutto.

11.4.1 Metodo Particle-Particle (PP)

I metodi N-body più semplici sono quelli detti Particle-Particle nei quali la forza che agisce sulla i -esima particella viene calcolata come sommatoria su tutte le altre particelle del contributo gravitazionale, esattamente come nella (11.21):

$$F_i \propto \frac{\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|^3} \quad (11.24)$$

Dal punto di vista dei linguaggi di programmazione, si tratta di un doppio ciclo `DO` in cui per ogni i -esima particella calcoliamo il contributo (che scala con il quadrato della distanza) di tutte le altre particelle. Dopodiché la forza trovata viene usata in un nuovo ciclo `DO` per aggiornare la velocità di tutte le particelle, che sarà la somma della vecchia velocità più la sua derivata temporale (i.e. l'accelerazione) per il passo temporale. Nell'ultimo ciclo `DO` si risolve l'equazione differenziale per la posizione delle particelle, che sarà data dalla somma della vecchia posizione più la sua derivata temporale (i.e. la velocità) per il passo temporale. Fatto questo si aggiorna il contatore temporale e si ripetono tutte le operazioni precedenti partendo dalle nuove condizioni iniziali appena aggiornate.

Questi codici sono estremamente semplici e richiedono poche righe di codice per essere implementati, anche volendo passare al secondo ordine per migliorare l'algoritmo rispetto a quello di Eulero. Ovviamente però, essendo semplice presenta svariati problemi, è un metodo

semplice ma molto costoso dal punto di vista computazionale. Il numero delle operazioni che il calcolatore deve compiere scala con il quadrato del numero di particelle che consideriamo, poiché è necessario calcolare tutte le distanze tra coppie di particelle prese in considerazione⁵. Questo genera non pochi problemi in quanto per avere un metodo cosmologicamente accurato noi vorremmo poter usare molte particelle. Ad esempio se volessimo studiare la dinamica all'interno di una galassia considerando ogni stella una particella avremmo 10^{12} particelle e quindi 10^{24} operazioni ad ogni passo temporale. Questo metodo è quindi adatto solo a situazioni in cui le particelle non sono molte (dell'ordine di $10^{3\div 4}$ oggi). Ad oggi questo metodo è sì il più dispendioso in termini di tempo di calcolo, ma anche il più accurato, in quanto la forza è descritta esattamente.

Un altro grande problema di questo metodo è insito nella formula (11.24). Si capisce subito che la forza diverge quando le due particelle tendono a coincidere, è perciò necessario imporre una distanza minima sotto la quale le particelle non possono avvicinarsi. Questo equivale a simulare una dimensione finita delle particelle che, nel codice così scritto, sono considerate puntiformi, questo evita la divergenza ma è una scelta arbitraria.

I metodi PP hanno ispirato la costruzione di calcolatori appositi. Il GRAPE è uno di questi (e non ci stupisce che sia giapponese, eheh hontōni?) e il suo compito è quello di calcolare velocemente la distanza tra coppie di dati. Con questo tipo di computer è stato possibile ottenere simulazioni con un numero di particelle dell'ordine di 10^6 e tempi di calcolo accettabili per una vita umana (N.B. i calcolatori e i tempi di calcolo costano!).

11.4.2 Metodi su griglia (PM, P3M)

In alternativa ai metodi particle-particle sono stati sviluppati questi metodi che oltre che concentrarsi sulle singole particelle, fanno uso di griglie di punti.

Codici Particle-Mesh (PM)

Vengono usate sia una descrizione della massa sotto forma di particelle sia una opportuna griglia in cui calcolare le proprietà che sono tipicamente “di campo” come la densità, il potenziale o la forza stessa. Tali quantità non sono quindi calcolate per ogni particella ma vengono prima calcolate utilizzando una griglia regolare e se ne trova il valore per ogni particella interpolando i valori tra i diversi punti-griglia.

Questa procedura ha ovviamente vantaggi e svantaggi, vediamo un esempio per la densità. Nel caso di un metodo PP, la densità è descritta da una serie di delta di Dirac, una per ogni particella, distribuite nello spazio e nelle quali la densità non è nulla, mentre nel resto dello spazio lo è. Con una griglia regolare invece si definisce in ogni punto un valore della densità, costruendo così un'approssimazione di distribuzione continua. Per poter ricostruire questa densità dobbiamo fare un'operazione di filtraggio, simile a quella fatta quando siamo passati da δ a δ_M in teoria lineare (remember filtro top-hat?). La densità in ognuno dei punti della griglia è data da

$$\rho(\mathbf{x}_{ijk}) = \sum_{l=1}^{N_{part}} W(\mathbf{x}_l - \mathbf{x}_{ijk}) \rho(\mathbf{x}_l) \quad (11.25)$$

cioè dalla sommatoria su tutte le particelle della densità nel punto dove queste si trovano, smussata per un opportuno filtro. I filtri possibili sono banali e possono essere decomposti

⁵Il numero di combinazioni di m elementi di un insieme di N elementi è dato da N^m .

nelle tre direzioni cartesiane: $W(\mathbf{x}) = w_i w_j w_k$. È attraverso l'applicazione del filtro che avviene l'interpolazione. Si potrebbe usare un filtro gaussiano ma avremmo il problema che non andrebbe mai a zero, oppure

- **Nearest Grid Point** (NGP), o “del punto griglia più vicino”:

$$\begin{cases} w_i = 1 & |x| \leq \Delta/2 \\ w_i = 0 & |x| > \Delta/2 \end{cases}$$

dove quindi alla densità del punto griglia i -esimo contribuiscono tutte le particelle la cui distanza è minore della metà dell'intervallo spaziale tra due punti consecutivi. Porta a discontinuità nei valori al contorno della griglia.

- **Cloud In Cell** (CIC):

$$\begin{cases} w_i = 1 - |x|/\Delta & |x| \leq \Delta/2 \\ w_i = 0 & |x| > \Delta/2 \end{cases}$$

una particella contribuisce tanto più alla densità nel punto griglia i -esimo, quanto più è ad esso vicina. Porta a discontinuità nella derivata prima della densità.

- **Triangular Shaped Cloud** (TSC), al contrario dei due precedenti in cui una determinata particella potrebbe influenzare 4 punti in una griglia bidimensionale (un box), questo tipo di filtri aumentano l'influenza a 9 punti griglia (4 box):

$$\begin{cases} w_i = 3/4 - x^2/\Delta^2 & |x| \leq \Delta/2 \\ w_i = (3/2 - |x|/\Delta)^2/2 & \Delta/2 < |x| < 3\Delta/2 \\ w_i = 0 & |x| > 3\Delta/2 \end{cases}$$

Porta a discontinuità nella derivata seconda della densità.

Scelto il filtro che meglio si adegua alle esigenze del particolare problema che ci si propone di studiare, il programma entra in un loop temporale i cui tipici step sono i seguenti:

1. partendo dalle posizioni delle particelle vengono calcolate le densità sui diversi punti griglia utilizzando le interpolazioni precedenti ottenendo così una distribuzione di densità sulla griglia $[\rho(x_p) \xrightarrow{\text{interp.}} \rho(x_g)]$;
2. viene risolta l'equazione di Poisson sulla griglia nello spazio di Fourier poiché in questo spazio tale equazione è una semplice moltiplicazione (remember il k^{-2} usato in teoria lineare?) $[\rho(x_g) \xrightarrow{\text{FFT}} \rho(k_g) \xrightarrow{\text{Poiss.}} \phi(k_g)]$;
3. si ottiene una stima, sui punti della griglia, nello spazio di Fourier della forza come una derivata spaziale del potenziale appena trovato $[\phi(k_g) \xrightarrow{\partial/\partial k_g} F(k_g)]$;
4. si antitrasforma con Fourier per avere la forza nello spazio reale su ogni punto della griglia che poi interpolando (vedi sopra) può essere applicata ad ogni singola particella $[F(k_g) \xrightarrow{\text{a-FFT}} F(x_g) \xrightarrow{\text{interp.}} F_i(x_p)]$;
5. al termine del loop vengono integrate le equazioni del moto.

A prima vista sembrerebbe di aver complicato molto le cose, ma ne è valsa la pena poiché, nonostante all'apparenza molto complesso, questo metodo è molto veloce (il numero di operazioni cresce come $N \log N$). La velocità è dovuta all'applicazione delle trasformate di Fourier il calcolo delle quali è veloce poiché abbiamo usato una griglia temporale (esistono le cosiddette **Fast Fourier Techniques**, algoritmi per fare le trasformate di Fourier in maniera rapida). Passando allo spazio di Fourier anche il calcolo dell'equazione di Poisson diventa veloce poiché si riduce ad una semplice moltiplicazione.

Ma noi prima avevamo detto che la gravità sentita da ogni particella è data dalla somma dei contributi di tutte le altre particelle, mentre qui io calcolo $\phi(k)$ punto per punto! Viene da dire “eccerto che è più veloce, prima facevo la somma su tutte le particelle, so boni tutti così!” Ma il fatto che il calcolo della forza si sia ridotto ad un semplice prodotto in cui entra esclusivamente il valore della densità nel punto griglia k_g non deve far pensare che la gravità così ottenuta sia un valore locale. Siamo infatti nello spazio di Fourier e in ogni suo punto è tenuta traccia di tutto lo spazio reale (ricordare che scomponiamo il campo di densità in una somma di onde), la trasformata di Fourier della densità nello spazio reale è

$$\rho(\mathbf{k}) \propto \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\mathbf{x}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d^3\mathbf{x}$$

cioè l'**integrale** su tutto lo spazio (e.g l'Universo). Quindi, mentre prima eravamo costretti a fare una somma per tutte le particelle ora questo compito lo svolge in automatico la trasformata di Fourier, poiché per ottenerla abbiamo integrato su tutto lo spazio, **su tutto l'Universo**. Quindi è già $\rho(k_g)$ a non essere più un valore locale e quindi il metodo è formalmente corretto.

Il lato negativo dei metodi PM è di essere meno accurati dei PP, poiché la griglia introduce dei problemi di risoluzione⁶, non è ben rappresentata la maniera in cui la massa si distribuisce nello spazio (tanto più accurato quanto più fitta è la griglia ma dipende anche dal filtro usato).

I metodi PM possono essere applicati a sistemi con un grande numero di particelle, rendendo possibili simulazioni con un miliardo di particelle, ma i risultati non sono accurati sulle scale piccole. Una soluzione potrebbe essere quella di usare griglie adattive o griglie mobili che seguano la formazione delle strutture, un'altra soluzione la vediamo nella prossima sezione.

Codici Particle-Particle/Particle-Mesh (P3M)

Abbiamo quindi visto che i metodi PP sono estremamente accurati ma applicabili esclusivamente a piccoli insiemi di particelle per i lunghi tempi di calcolo, mentre i metodi PM, seppur veloci e in grado di lavorare con grandi numeri di particelle, sono poco accurati sulle piccole scale. La soluzione ai problemi di entrambi i metodi è quindi quella di combinarli insieme (sono complementari in pregi e difetti), anche se non è facile. Si fa lavorare il codice PP sulle piccole scale e il PM su quelle grandi, così nascono i metodi detti PP-PM, abbreviato in **P3M**.

Questo viene fatto scomponendo la forza gravitazionale in due parti: quella a corto raggio è computata usando un metodo PP, mentre quella a lungo raggio si ottiene usando un metodo PM. Tutto ciò è possibile poiché la forza gravitazionale è additiva⁷: la forza sentita dalla i -esima particella può essere scritta come la somma della forza esercitata dagli oggetti vicini e quella esercitata dagli oggetti lontani:

⁶Hai capito in che senso “risoluzione”, è “separazione” non “soluzione”, come in ottica.

⁷Grazie al Grande Mostro Spaghetti Volante!

$$F_i = F_{near} + F_{far}$$

Ovviamente cosa si intende per “vicini” e “lontani” dipende dalle scelte del programmatore. La parte data dagli oggetti vicini, F_{near} , è quella che varia più velocemente, poiché va come r^{-2} se cambia la posizione delle particelle questa se ne accorge subito, deve poter essere ottenuta in maniera molto accurata e quindi si utilizza il metodo PP. Viceversa nella parte data dagli oggetti lontani, F_{far} , se una particella si sposta di qualche punto griglia non cambia molto sul bilancio totale, può quindi essere rappresentata da uno schema PM. Abbiamo quindi il vantaggio che, poiché buona parte delle particelle le consideriamo lontane, la maggior parte del calcolo viene affidata al metodo PM. Quando poi dobbiamo adare a studiare più nel dettaglio ad esempio una struttura che si sta formando, abbiamo il vantaggio che su tale scala il calcolo è accurato grazie all’applicazione del metodo PP.

Ovviamente mettere insieme due metodi crea delle complicazioni nel codice, come la necessità di definire un collegamento coerente tra le due parti, questo viene fatto utilizzando una **distanza critica**, ma se questa distanza è troppo piccola il metodo complessivo tenderà ad un metodo PM, viceversa, tenderà ad un metodo PP (la definizione di “vicino” e “lontano” ha un’importanza critica). È inoltre necessario che il codice crei delle liste di “particelle vicine” alle quali applicare la computazione a corto raggio (**linked lists**).

I metodi P3M hanno tempi di calcolo che scalano con $N \log N$ come i metodi PM, ma con un fattore moltiplicativo costante più grande.

Gli step dell’algoritmo possono essere riassunti nel seguente elenco:

- Applicazione delle Forze a lungo raggio:
 - calcolo della densità nei punti griglia;
 - stima del potenziale;
 - interpolazione delle forze nella posizione delle particelle;
 - aggiornamento dei momenti.
- Applicazione delle Forze a corto raggio:
 - ricerca delle particelle vicine;
 - aggiornamento dei momenti.
- Aggiornamento delle velocità e delle posizioni delle singole particelle.

11.4.3 Metodi ad Albero Gerarchico (HT)

Quando abbiamo un gruppo di particelle relativamente lontane dalla i -esima particella su cui vogliamo calcolare il contributo della forza, possiamo considerarle come fossero un’unico oggetto di massa uguale alla somma delle masse delle singole particelle, posizionata nel baricentro del sistema da loro composto. Aniché calcolare tutte le distanze che legano la particella in questione con ciascuna delle particelle che costituiscono il gruppo, basta calcolare la distanza tra la particella e il baricentro del gruppo di particelle.

Si costruisce così un **albero gerarchico** (hierarchical tree): scomponiamo il volume (in questo caso un quadrato perché siamo in due dimensioni) in celle, con una prima divisione per 2 e ottenendo quindi 4 sottocelle. Continuiamo a fare questa operazione fintanto che

si basa sulla distanza e sulle dimensioni delle celle in esame. Dopo aver costruito l'albero e fissata una particella, si considerano le celle cominciando dalle più grandi. Se queste soddisfano il criterio, il loro contributo gravitazionale è considerato nel suo insieme, altrimenti si scende nella gerarchia delle celle (processo di **discesa dall'albero**).

I metodi HT sono di gran lunga i più utilizzati nelle simulazioni cosmologiche e, nonostante richiedano una grande memoria e implementarli richieda codici complessi, sono molto accurati e hanno tempi di calcolo ridotti (crescono come $N \log N$). I principali vantaggi sono l'assenza di una griglia che limiti la risoluzione, sono facili da mettere in parallelo e da combinare con dei codici PM (si parla in questo caso di codici TPM). Possono tuttavia presentare problemi con le condizioni al contorno periodiche.

11.4.4 Confronti e Commenti

Abbiamo visto diversi codici numerici che potremmo utilizzare per far evolvere i nostri modelli di Universo, è però necessario innanzitutto testarne l'affidabilità. Per fare questo esistono delle procedure, dei **test fondamentali** che devono essere superati dal codice:

- **conservazione della massa:** è piuttosto facile da superare poiché, avendo discretizzato la massa quello che si deve conservare è il numero totale di particelle;
- **conservazione dell'energia,** deve essere rispettata l'equazione di Layzer-Irvine:

$$\frac{d(a^2 T)}{da} + a \frac{dU}{da} = 0$$

con U energia interna, T temperatura e a fattore di scala. La conservazione viene facilmente raggiunta ad un livello dello 0.1%;

- **conservazione del momento:** facilmente raggiunta ad un livello dello 0.1%;
- **conservazione del momento angolare:** questa può creare delle difficoltà, in particolare se si tratta con funzioni che hanno condizioni al contorno periodiche (come nei metodi che fanno uso di griglie).

Nelle nostre simulazioni noi vogliamo testare i modelli cosmologici di formazione delle strutture su grande scala e utilizziamo tipicamente dei box di centinaia di Mpc . Parliamo allora delle **condizioni iniziali** da applicare nelle simulazioni cosmologiche. Innanzitutto è necessario assumere un **modello cosmologico**, facendo questa scelta stabiliamo anche le caratteristiche che lo spettro di potenza delle fluttuazioni di materia dovrà avere.

Dalla teoria dell'inflazione sappiamo che le perturbazioni che vengono generate al termine di questa fase sono random e quindi la loro distribuzione è gaussiana. Qualunque sia lo spettro di potenza che consideriamo vale la

$$P(k) = \langle |\delta_k|^2 \rangle$$

Per il

Teorema: *se le fasi di un insieme simulato di numeri complessi sono casuali (sono cioè un numero qualsiasi tra 0 e 2π) i δ_k corrispondenti hanno distribuzione gaussiana.*

possiamo sviluppare una **realizzazione random** di tale spettro di potenza sfruttando l'assunzione di gaussianità (i.e. fasi random) nello spazio di Fourier. Assumiamo quindi

l'**approssimazione di Zel'dovich** di regime lievemente non-lineare per calcolarne il corrispondente campo di dislocamento. **Perturbiamo una distribuzione uniforme**(come una griglia) di particelle interpolando per trovarne le posizioni.

Tuttavia non si può stabilire a priori se una delle simulazioni a N-corpi presentate sia migliore delle altre, dipende dal problema con cui ci dobbiamo confrontare e dai mezzi a nostra disposizione (Tabella 11.1).

metodo	efficienza CPU	risoluzione	semplicità
PP	✓	✓✓✓	✓✓✓
PM	✓✓✓	✓	✓✓
P3M	✓✓	✓✓✓	✓
HT	✓✓	✓✓✓	✓✓

Tabella 11.1: *Metodi numerici a confronto.*

I metodi **PP** sono ottimi dal punto di vista dell'accuratezza e offrono dei valori esatti nel calcolo delle forze, inoltre sono molto semplici e di facile implementazione. D'altro canto però hanno tempi di calcolo enormi che limitano la dimensione massima dell'insieme di particelle alle quali possono essere applicati. La loro risoluzione in massa non è adeguata ai problemi di carattere cosmologico, in quanto più particelle consideriamo più è piccola la percentuale in massa di una singola particella sul totale (troppo dettagliati).

Per quanto riguarda i metodi **PM** hanno un ottimo scaling ($N \log N$) con il numero di particelle in termini di efficienza della CPU e sono mediamente complessi in quanto richiedono l'implementazione di algoritmi per la trasformazione con Fourier. Il problema più grande che li riguarda è la bassissima risoluzione, fortemente limitata dalla presenza di una griglia fissa e regolare.

I metodi **P3M** sono un blend dei due precedenti e hanno tempi di calcolo che possono essere più o meno lunghi a seconda della definizione che si dà di "vicino" e "lontano", dal punto di vista della risoluzione presentano gli stessi vantaggi dei metodi PP. Viene sacrificata la semplicità del codice che risulta infatti di difficile progettazione poiché bisogna essere certi che non vengano introdotti degli elementi spuri nella scala di raccordo tra il grande e il piccolo.

Tra tutti, quelli che sembrano godere di più vantaggi che svantaggi sono i metodi **HT** che, con tempi di calcolo simili a P3M e con un ottima risoluzione poiché le forze sono calcolate direttamente per le particelle vicine, hanno un livello di complessità simile a quello dei metodi PM.

Ad oggi solitamente si utilizzano metodi P3M o HT, le altre due tipologie non sono più sfruttate.

Millennium Run. La più celebre simulazioni N-corpi degli ultimi anni è la **Millennium Run**, il cui risultato finale è riportato in Figura 11.13

Questa simulazione consta di $N = 2160^3 \approx 10^{10}$ particelle distribuite in un box di $500 Mpc/h$ di lato ad un redshift iniziale $z_i = 127$ e lasciate evolvere fino a $z = 0$, assumendo un modello di universo piatto, $\Omega_{tot} = 1$, multicomponente (con $\Omega_M = 0.25$, $\Omega_b = 0.045$ e il resto costante cosmologica), $h = 0.73$, $n = 1$. La simulazione ha impiegato 343000 ore-macchina su un IBM-Regatta (corrispondenti a circa 1 mese-macchina). Sono stati salvati dati grezzi e ridotti a 64 redshift differenti per un totale di 27 terabyte.

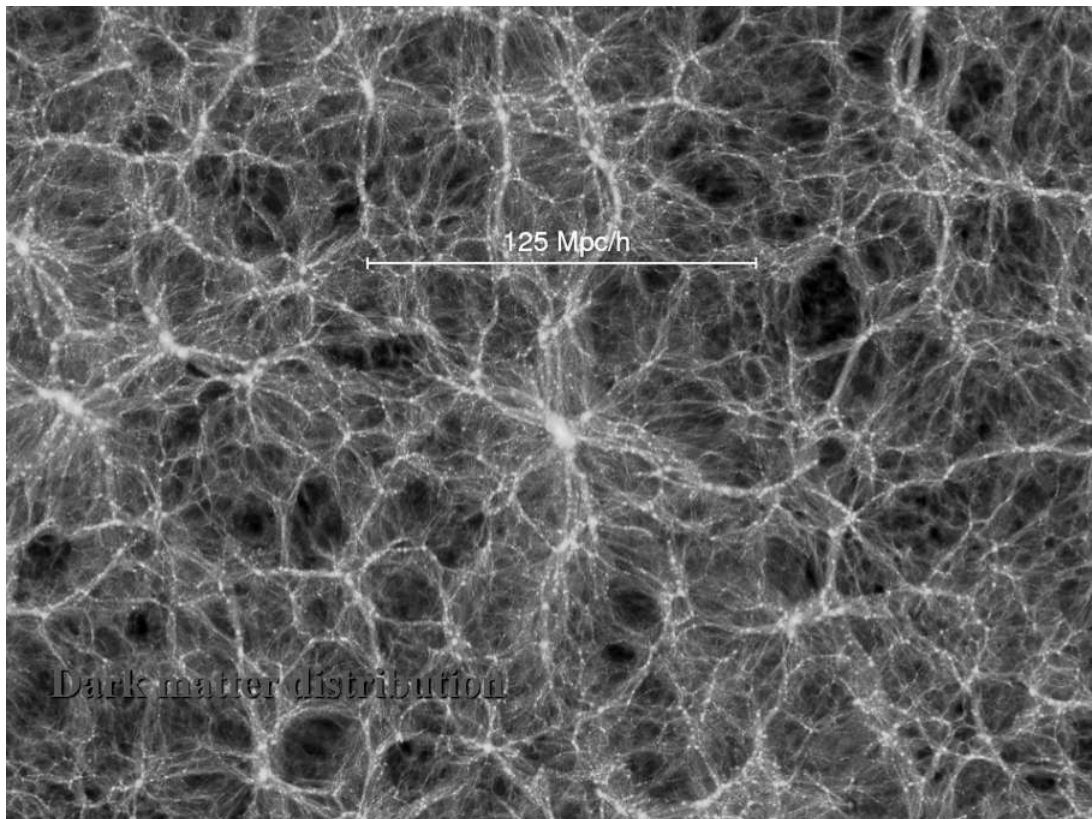


Figura 11.13: *Millennium Run*, distribuzione su grande scala di materia oscura a $z = 0$.

La MR ha una risoluzione sufficiente a descrivere esaustivamente un singolo ammasso di galassie con milioni di componenti (Figura 11.14).

Nella MR l'unica interazione considerata è quella gravitazionale e durante la simulazione viene fatta interagire solo la materia oscura, le galassie vengono poi aggiunte usando modelli semi-analitici per calcolare come la materia barionica segue gli aloni di DM. Questi modelli vengono implementati con “ricette numeriche” esterne alla simulazione che seguono tutta la storia di formazione delle galassie (cooling, formazione stellare, arricchimento chimico, evoluzione spettro-fotometrica, eccetera). In realtà questo passaggio è rischioso perché il processo di galaxy formation non è stato ancora totalmente compreso: entrano infatti in ballo i barioni e i processi (anche non gravitazionali) che agiscono all'interno delle galassie avvengono su scale molto più piccole di quelle della simulazione, tali da non poter essere risolte. D'altro canto non possiamo neanche pretendere di sapere come si comporta una singola stella all'interno di una galassia posta in un volume di $500 Mpc$ di lato. In ogni caso la Millennium Run è un banco di prova per la simulazione della formazione di galassie e della loro distribuzione su grande scala (fino a 10^7 strutture formate), ottenute usando modelli semi-analitici.

Un'altra importante feature della MR e delle simulazioni a N-corpi in generale è quella di essere in grado di riprodurre molto fedelmente la **funzione di massa**, in particolare di quella proposta nel modello di Sheth & Tormen (una modifica alla Press-Schechter in cui è assunto un collasso ellissoidale). Questo significa che possiamo utilizzare le simulazioni numeriche per calcolare le funzioni di massa previste dai diversi modelli cosmologici. Questo ci fornisce uno strumento con il quale confrontare le osservazioni con la teoria, permettendoci quindi di mettere dei vincoli sui parametri cosmologici.

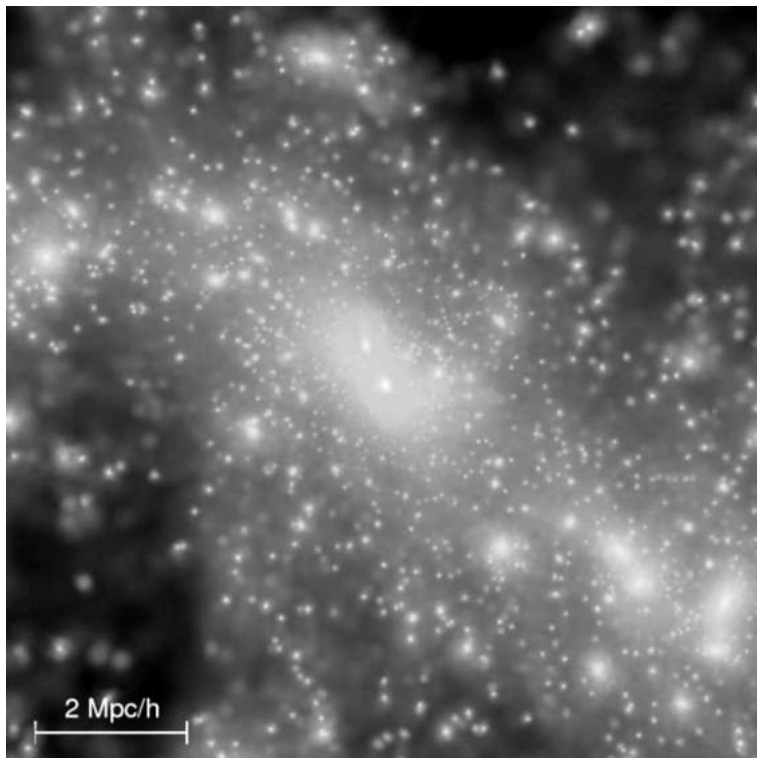


Figura 11.14: *Particolare della Millennium Run: un ammasso di galassie.*

Evoluzione della Distribuzione di Materia. Altro punto di forza delle simulazioni numeriche è la capacità di riprodurre molto bene l'evoluzione cosmologica della materia. In Figura 11.15 abbiamo a confronto la distribuzione prevista dalle simulazioni (quì ancora la MR) per la materia oscura nella colonna di sinistra e quella per le galassie nella colonna di destra, per 4 diversi redshift decrescenti dall'alto in basso.

Si può notare come la maggior parte dell'evoluzione avvenga a redshift relativamente basso, tra $z = 2$ e $z = 0$, mentre prima la distribuzione è abbastanza omogenea.

Utilizzando queste simulazioni è possibile costruire dei modelli che ci dicono come cresce lo spettro di potenza, fittando il comportamento a diversi redshift. Per quanto infatti tale evoluzione sia stata risolta analiticamente in regime lineare, quando passiamo all'era dell'evoluzione non lineare non possiamo che fare affidamento sulle simulazioni numeriche per ottenere dei risultati e fittare le curve.

Le galassie non crescono isolate ma si sviluppano in ammassi e gruppi nei quali avvengono di continuo fenomeni di accrescimento e merging: tutto ciò che circonda un oggetto può influenzarne l'evoluzione. È quindi importante che una buona simulazione possa effettuare degli zoom per studiare i singoli oggetti (galassie ed ammassi, appunto), senza però perdere la descrizione globale dell'Universo che li circonda.

Le perturbazioni di densità reali abbiamo detto che non possono essere perfettamente sferiche, avranno quindi tre assi di lunghezze diverse (se assumiamo un modello di collasso ellissoidale). La gravità nella direzione dell'asse minore è più forte di quella nell'asse maggiore, poiché ci si viene a trovare più vicino al centro della struttura. Il collasso ha quindi delle direzioni privilegiate. Nell'idea più banale di formazione delle strutture succede che una struttura tridimensionale tende a collassare prima lungo l'asse minore, formando strutture di tipo planare che in un secondo momento collasseranno lungo il nuovo asse minore portando alla formazione di strutture unidimensionali come i filamenti osservati sia nell'Universo reale

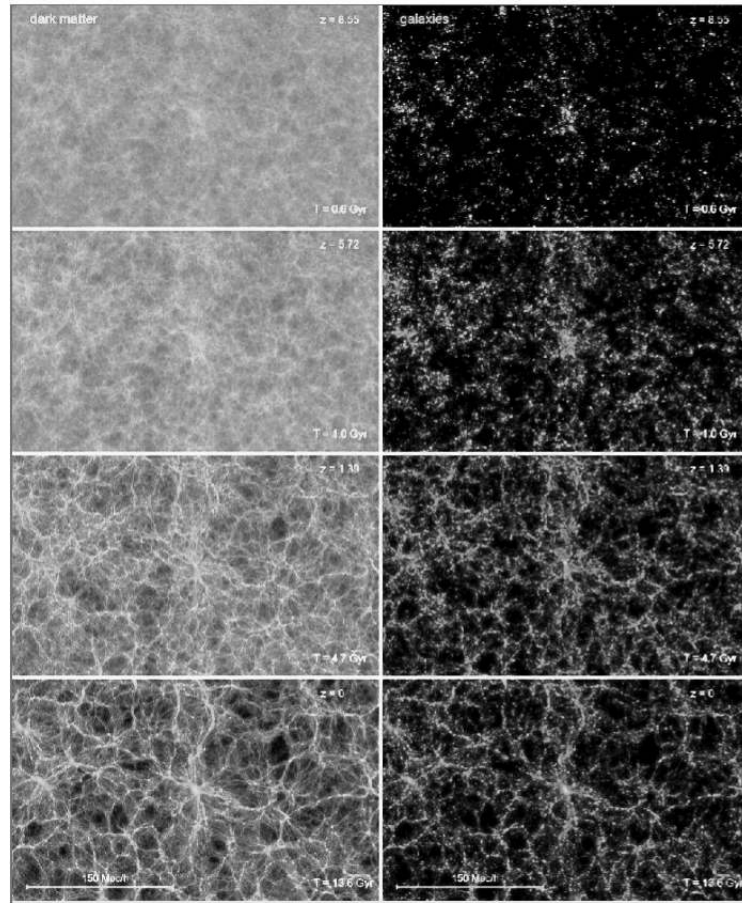


Figura 11.15: Confronto tra la distribuzione di materia oscura (sinistra) e quella di galassie (destra) nella Millennium Run a 4 differenti redshift, dall'alto verso il basso: $z = 8$, $z = 5.7$, $z = 1.3$, $z = 0$. (Il lato lungo delle box spazia su circa 300Mpc)

che nelle simulazioni. In ultimo avviene il collasso lungo l'ultima direzione rimasta che porta alla formazione di oggetti sferoidali (e.g. ammassi e super-ammassi). Solo ed esclusivamente in un improbabile caso di perturbazione originale perfettamente sferica ed isolata può avvenire un collasso simultaneo lungo tutti e tre gli assi.

Per le distribuzioni random rappresentabili con una gaussiana siamo in grado di calcolare la probabilità di avere determinati rapporti tra gli assi. Nel 42% dei casi abbiamo situazioni che portano alla formazione di piani, un altro 42% per la probabilità di avere filamenti, nell'8% dei casi si formano strutture sferoidali e un altro 8% di avere vuoti sferici. Questo è previsto da una teoria gaussiana della distribuzione dei rapporti assiali nelle forme tridimensionali delle perturbazioni ed è riprodotto dalle simulazioni. Da qui l'importanza di un codice che tenga conto delle strutture in formazione tenendo conto delle influenze mareali degli oggetti esterni. Le simulazioni magnificate ("zoomed") agiscono in questo senso. Si fa una prima simulazione a bassa risoluzione per capire quali sono le regioni in cui si formano le strutture. La simulazione viene poi fatta ripartire con una risoluzione maggiore nella regione di interesse, mantenendo però la stessa bassa risoluzione nel resto del volume in modo da avere comunque lo stesso campo mareale ad influenzare la struttura in esame. In Figura 11.16 il risultato di simulazioni di questo tipo.

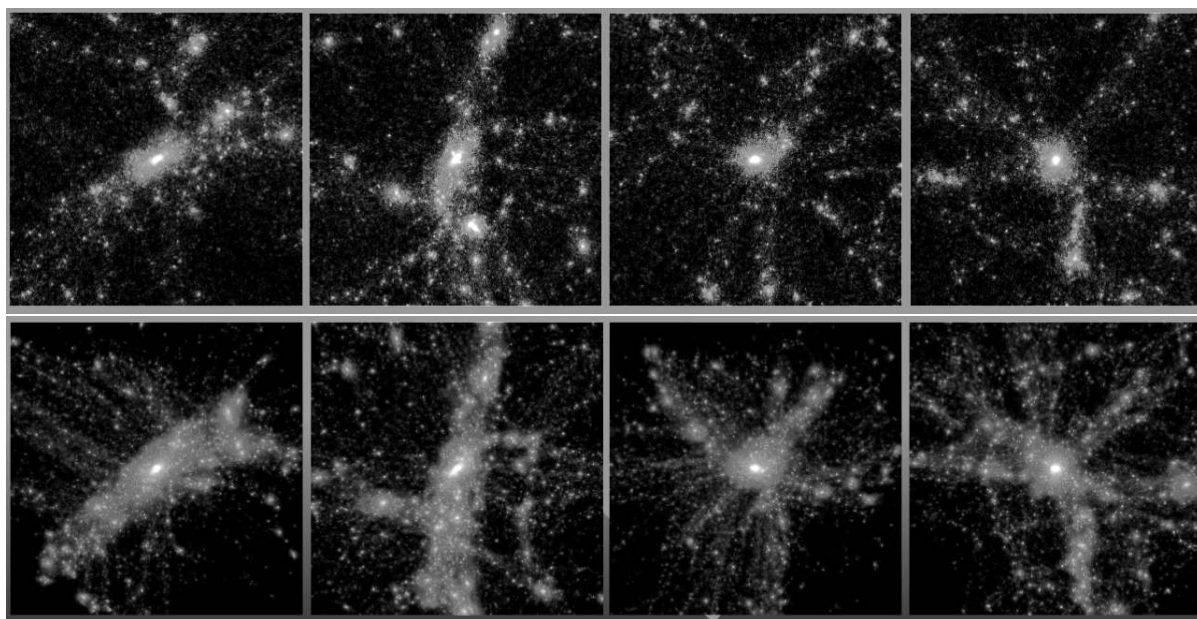


Figura 11.16: Le due fasi di una simulazione magnificata, sono riportati 4 oggetti (da sinistra a destra), al primo step con bassa risoluzione della simulazione (sopra) e dopo la seconda fase a maggior risoluzione (sotto). [B.Lanzoni et al.]

Il risultato principale delle simulazioni sulle simulazioni sulle singole strutture è quello di dirci che esiste una tendenza a seguire un profilo universale da parte delle strutture di materia oscura. Si effettuano simulazioni con numeri diversi di particelle di materia oscura, dal punto di vista astrofisico questo significa simulare oggetti cosmici diversi (e.g. galassie nane, galassie giganti, ammassi di galassie). Sulla materia oscura però, come ribadito fino allo sfinimento⁸, agisce solo la gravità che se ne fotta della scala. Questo è esattamente riprodotto dalle simulazioni che, indipendentemente dalla scala, producono strutture del

⁸ma quando ti entra in testa?

tutto autosimilari. In termini di materia oscura, i 10 ordini di grandezza che intercorrono tra un ammasso di galassie e un ammasso globulare sono del tutto indifferenti.

Per concludere con gli N-corpi, vediamo l'ultimo grande strumento che si ottiene dalle simulazioni. Il Profilo di Navarro-Frenk-White è un profilo di densità universale che va come

$$\rho \propto \left(\frac{r}{r_s}\right)^{-1} \left(\frac{1+r}{r_s}\right)^{-2}$$

si distingue tra un andamento interno che va come r^{-1} ed un andamento esterno che va come r^{-2} , il valore r_s è un raggio caratteristico. Tale profilo viene seguito indiscriminatamente da oggetti di tutte le masse (dalle galassie nane agli ammassi), con valori diversi della normalizzazione (Figura 11.17).

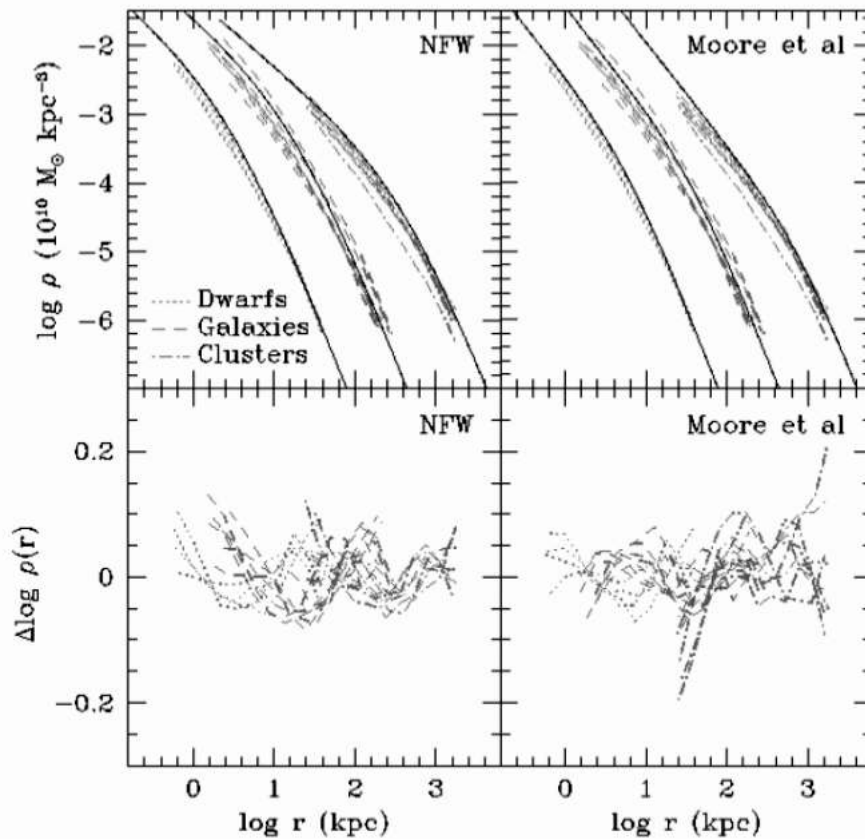


Figura 11.17: *Profili di NFW e di Moore e relativi grafici dei residui per tre classi di oggetti astrofisici: galassie nane, galassie normali, ammassi.*

Dal grafico dei residui si può vedere come il profilo non segua alla perfezione le simulazioni numeriche, le fluttuazioni sono molto ampie. La discussione se si debba preferire alla pendenza interna di NFW quella meno ripida di Moore è tutt'ora in corso. C'è da dire in ogni caso che quando ci si avvicina alle regioni più interne delle strutture si incontrano problemi sia di risoluzione numerica che a livello osservativo. Il risultato importante resta comunque che esiste un profilo universale di densità degli oggetti cosmici ed è lo stesso che descrive la distribuzione di densità degli aloni di materia oscura.

11.5 Gastrofisica e Codici Idrodinamici

Se vogliamo seguire la formazione delle strutture però non possiamo limitarci a studiare esclusivamente il contributo della gravità sulla materia oscura ma dobbiamo focalizzare la nostra attenzione anche sull'astrofisica del gas. Nonostante infatti, i barioni costituiscano solo il 15% sul totale di materia che collassa, i processi fisici che li coinvolgono mentre questo avviene sono molteplici e sono principalmente questi processi quelli che osserviamo direttamente. Il gas inoltre influenza anche il profilo di densità totale nelle regioni più centrali di un ammasso di galassie, questo effetto però non è tanto grande da non poter essere trascurato in prima approssimazione. È l'interazione dei barioni con la radiazione elettromagnetica che ci porta informazione delle strutture cosmiche. Possiamo conoscere la massa totale di un ammasso di galassie tramite lo studio della sua emissione termica, tramite l'effetto Sunyaev-Zel'dovich o andando a vedere la dinamica delle galassie che lo compongono o l'effetto di lensing gravitazionale sugli oggetti retrostanti.

La **materia oscura** è non collisionale, poichè le particelle hanno una sezione d'urto trascurabile, e quindi l'unica forza che agisce su essa è la gravità. La **materia barionica** invece interagisce sia con la gravità e con se stessa, sia con la radiazione, attraverso molti processi radiativi: effetto Compton, Bremsstrahlung, ionizzazione, eccetera. Le **forze a corto raggio** che ne risultano possono essere descritte da un set di equazioni idrodinamiche. Tali equazioni sono solitamente PDE in tre dimensioni che possono essere arrangiate sotto una qualche forma di equazione di conservazione del flusso. Se da una parte lo sviluppo di codici idrodinamici è una complicazione perché fa entrare in ballo una vasta gamma di processi a complicare il problema, dall'altra abbiamo il vantaggio che esiste una vasta letteratura a riguardo. I codici per l'idrodinamica infatti vengono utilizzati anche in molti altri ambiti di ricerca astrofisica.

In generale per la risoluzione delle equazioni dell'idrodinamica esistono due grandi categorie di approcci numerici: i **metodi Euleriani** e quelli **Lagrangiani**. Tali metodi risolvono, con approccio differente, il sistema di equazioni dell'idrodinamica (??):

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla\phi - \frac{\nabla p}{\rho} & \text{equazione di Eulero} \\ \frac{d\rho}{dt} + \rho\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 & \text{equazione di continuità della massa} \\ \frac{du}{dt} = -\frac{p}{\rho}\nabla \cdot \mathbf{v} - \frac{\Lambda(u,\rho)}{\rho} & \text{1° Principio della Termodinamica} \\ p = (\gamma - 1)\rho u & \text{eq. stato per gas perfetto monoatomico } (\gamma = 5/3) \end{array} \right. \quad (11.26)$$

dove u è la densità di energia interna e $\Lambda(u, \rho)$ una funzione che parametrizzi i processi di raffreddamento e riscaldamento del gas. Vediamo allora in cosa differiscono i due approcci.

11.5.1 Metodi Euleriani

In questo tipo di codici i valori medi delle variabili idrodinamiche vengono calcolati sui punti di una (o più) griglie spaziali, fisse o adattive, le seconde hanno il vantaggio di poter essere raffinate nelle regioni in cui si vuole studiare il fenomeno con maggior dettaglio. I punti della griglia rimangono fissi nel tempo. Utilizzano questo approccio i metodi di Lax, Lax-Wendroff, Flux-Corrected Transport (FCT), Total Variation Diminishing (TVD), Piecewise Parabolic Method (PPM), eccetera.

Il **vantaggio** nell'utilizzare questi metodi si ha per la migliore descrizione che danno dei gradienti. Nei problemi astrofisici abbiamo infatti spesso a che vedere con degli shock,

ovvero con gradienti ripidi nelle variabili (e.g. temperatura, densità): avere a disposizione una griglia fissa nel tempo facilita il calcolo delle derivate. Il maggior **problema** si ha nella risoluzione, come in qualsiasi codice che si appoggia ad una griglia infatti, i valori nei punti spaziali sono valori mediati sul salto spaziale tra un punto-griglia e l'altro.

I codici Euleriani partono da una stima del valor medio iniziale delle variabili in una cella e calcolano i flussi attraverso l'interfaccia che la separa dalle celle adiacenti durante lo step temporale. I flussi delle diverse variabili definiscono l'interazione del fluido contenuto in una cella con il resto del sistema. È dal metodo utilizzato per il calcolo dei flussi che dipende l'accuratezza del metodo; il metodo di Lax, ad esempio, considera esclusivamente l'interazione con le celle adiacenti, a ordini superiori vengono invece considerate regioni più estese attorno alla cella in esame (si parla di quantità conservate tra step temporali successivi). Una volta calcolati i flussi vengono aggiornati i valori medi di tutte le variabili su tutta la griglia.

Piecewise Parabolic Method (PPM) è uno dei metodi attualmente più utilizzati e più accurati.

- La cella j -esima non è influenzata da tutta la materia contenuta nelle celle adiacenti ($j-1$), ($j+1$), ma si considera solo quella contenuta nel **dominio di dipendenza**, ovvero nella regione di spazio che comprende tutta l'informazione che nello step temporale può raggiungere l'interfaccia con la cella j .
- I valori medi sono solo una prima approssimazione, i profili forniti dal metodo sono ricostruiti tramite un'**interpolazione parabolica a tratti**.
- Il **centraggio temporale** del valore dei flussi viene calcolato attraverso "interfaccia di zona" (si usa quindi un Control Volume Approach), $(j \pm 1/2)$, secondo la seguente procedura:
 - si calcolano i valori medi delle polinomiali di interpolazione sui domini di dipendenza a destra e sinistra per tutte le variabili idrodinamiche;
 - tali valori a sinistra e a destra sono le condizioni iniziali del problema di Riemann corrispondente (i.e. un problema dello Shock Tube⁹ con una soluzione analitica nota, utilizzato per ottenere i valori dei flussi sulle interfacce a metà dello step temporale).

11.5.2 Metodi Lagrangiani

Il sistema di riferimento si muove con il flusso delle variabili che si vogliono ottenere (e.g. densità del gas, temperatura). Le quantità idrodinamiche sono calcolate nella posizione delle particelle.

Il **vantaggio** sta nel poter seguire l'evoluzione del fluido a seconda di dove c'è maggiore quantità di materia. Se si formano degli addensamenti lì il codice ottiene valori con una accuratezza spaziale maggiore rispetto che nelle regioni sottodense. Il principale **problema** sta nell'assenza di un campionamento spaziale regolare, questo rende necessaria l'introduzione di viscosità artificiali per tenere a bada i gradienti più ripidi che potrebbero formarsi.

⁹Un problema ad una dimensione in cui abbiamo un fluido con due diversi valori fissi e costanti delle variabili, separati da un interfaccia.

Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH) è il prototipo di metodo Lagrangiano, nonché di gran lunga il più utilizzato, questo metodo assume:

- le proprietà del fluido sono calcolate in ogni posizione come una media pesata della variabile intorno al punto;
- il fluido è rappresentato da un numero finito di particelle, così da sostituire gli integrali con delle somme;
- sebbene in linea di principio la somma dovrebbe essere fatta su tutte le particelle del fluido, le interazioni idrodinamiche hanno effetto solo su distanze piccole¹⁰ quindi le somme possono essere fatte ridotte a sottocampioni di particelle vicine.

Questo ultimo punto rappresenta quanto si diceva a proposito della maggiore o minore accuratezza del metodo a seconda della presenza locale di particelle di fluido. Tipicamente infatti il numero di particelle che viene considerato per trovare i valori medi delle variabili in un punto è fissato: di solito sono 32 particelle. Questo significa che in una regione densa, nella quale le 32 sono tutte molto vicine, calcolare la media significa trovare il valore locale della variabile; se invece consideriamo una posizione nel sistema in cui la densità è bassa, le 32 particelle ad essa più vicine saranno molto distanziate tra loro e quindi mediando otterremo un valore più grossolano e meno accurato della variabile in quella regione.

Uno dei principali problemi di questo metodo dal punto di vista dei tempi di calcolo è dato dalla necessità di stilare delle liste di particelle connesse, ovvero è necessario trovare le N particelle vicine delle quali mediare i valori per ottenere le quantità idrodinamiche. Un vantaggio invece è dato dalla possibilità di calcolare le derivate che compaiono nelle PDE (11.26) in maniera molto agile, sfruttando la derivata di una **funzione filtro** che a sua volta può essere calcolata a priori, riducendo di molto il costo di CPU, vediamo come funziona. Supponiamo di voler conoscere una certa quantità idrodinamica A , la calcoleremo come l'integrale del suo valore in un intorno della posizione, usando un certo filtro:

$$\langle A(\mathbf{r}) \rangle = \int W(\mathbf{r} - \mathbf{r}', h) A(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}'$$

dove il filtro $W(\mathbf{r} - \mathbf{r}', h)$ pesa il contributo di una particella alla media a seconda della sua distanza dalla posizione $\mathbf{r}$, dando meno importanza ad una particella più questa è lontana. Per quanto abbiamo detto questo integrale si riduce ad una semplice somma

$$\langle A_i \rangle = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} A_j W(r_{ij}, h_{ij})$$

Ad esempio per la densità è data da

$$\rho_i = \sum_{j=1}^N m_j W(r_{ij}, h_{ij})$$

Con questo approccio anche le derivate diventano delle somme.

¹⁰la famosa “microfisica”

11.5.3 Confronto Tra Metodi Idrodinamici

I metodi elencati per l'evoluzione della materia barionica sotto l'effetto delle forze non esclusivamente gravitazionali vanno accoppiati con quelli illustrati nella sezione precedente che descrivevano la sola interazione gravitazionale della materia, poiché devono poter essere eseguiti insieme. Viene facile l'accoppiamento tra i metodi Euleriani a griglia e quelli N-body che anche sfruttano griglie spaziali fisse, come PM o P3M. Viceversa i metodi lagrangiani, essendo basati sulla distribuzione delle particelle del sistema, si accoppiano più facilmente con i metodi HT per la gravità, che sfruttano lo stesso approccio (circa).

Per confrontare i due diversi approcci, Lagrangiano ed Euleriano, vengono date le stesse condizioni iniziali a due o più codici idrodinamici con approcci diversi, e si fanno evolvere i sistemi corrispondenti per un tempo uguale. Questo è stato fatto ad esempio nel **confronto Santa Barbara** (Frenk et al. 1999) che ha confrontato 12 codici idrodinamici applicati ad una regione con gas e DM con la scala di un ammasso di galassie, per vedere se al termine delle operazioni i risultati erano consistenti. Le quantità considerate sono le densità di gas e materia oscura, la temperatura del gas e la luminosità X. Vediamo uno dei plot di confronto tra i metodi in Figura 11.18 in cui è riportata la luminosità X dell'ammasso in esame.

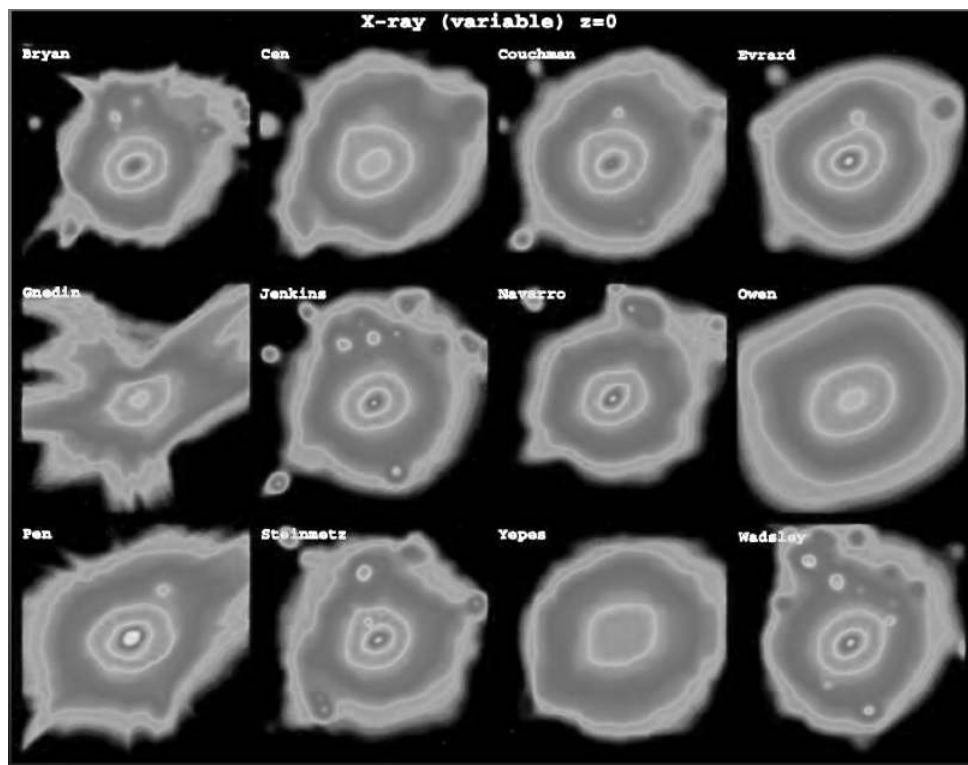


Figura 11.18: Luminosità X del gas a $z = 0$ per 12 differenti metodi numerici per l'idrodinamica. [Frenk et al. (1999)]

Tra i diversi codici utilizzati le distribuzioni variano moltissimo e in alcune sono presenti dei picchi di luminosità X molto intensi mentre altre danno dei profili quasi piatti. Questo fu un risultato drammatico nel 1999, significava che i codici idrodinamici non erano affidabili. I codici danno pressappoco gli stessi risultati per i profili della DM ma non per quelli relativi al gas, come si può vedere dai grafici dei residui in Figura 11.19, in particolare per quanto riguarda la luminosità X le deviazioni sono molto importanti.

Negli anni successivi sono stati fatti molti sforzi per risolvere il problema e si sono sviluppate due scuole di pensiero. C'erano i sostenitori dei metodi Euleriani che volevano una

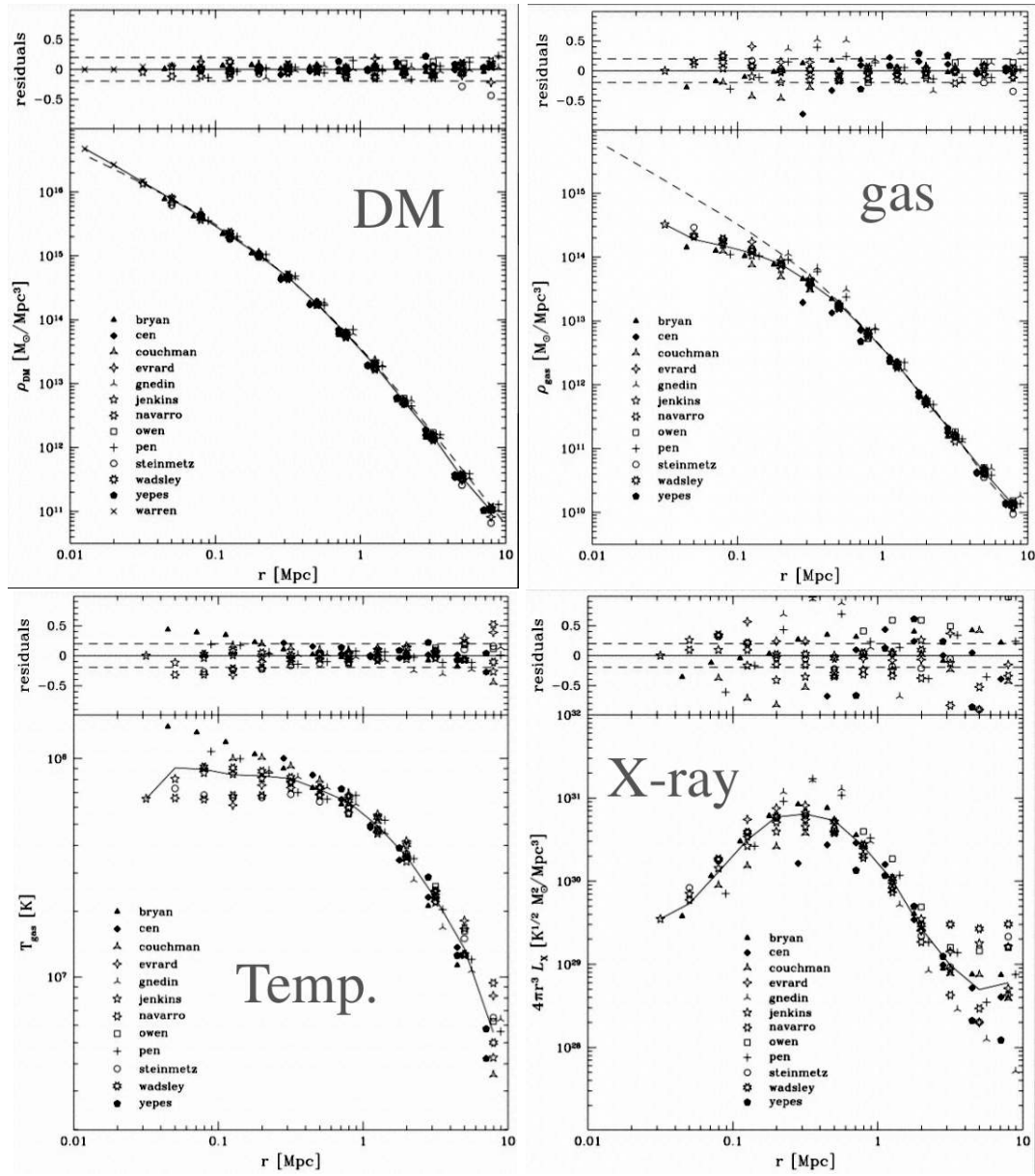


Figura 11.19: *Profili di densità di DM e gas (sopra) e di temperatura e luminosità X del gas (sotto), fit per diversi metodi idrodinamici. [Frenk et al. (1999)]*

più affidabile descrizione dei gradienti e i sostenitori dei metodi Lagrangiani, più attenti alla risoluzione spaziale del metodo, in particolare alla descrizione dei picchi delle variabili.

Dei metodi Lagrangiani di nuova generazione il primo ad essere stato reso pubblico è Gadget, si appoggia ad un codice SPH abbinato ad un HT. Il miglior codice Euleriano attualmente disponibile è Enzo (2004) che invece unisce un Adaptive Mesh Refinement (AMR) a codici HD come i PPM o Zeus. Dal confronto di questi due codici si è capito che il problema era di risoluzione. Imponendo la stessa risoluzione entrambi i codici danno un ottimo risultato simile (Figura 11.20).

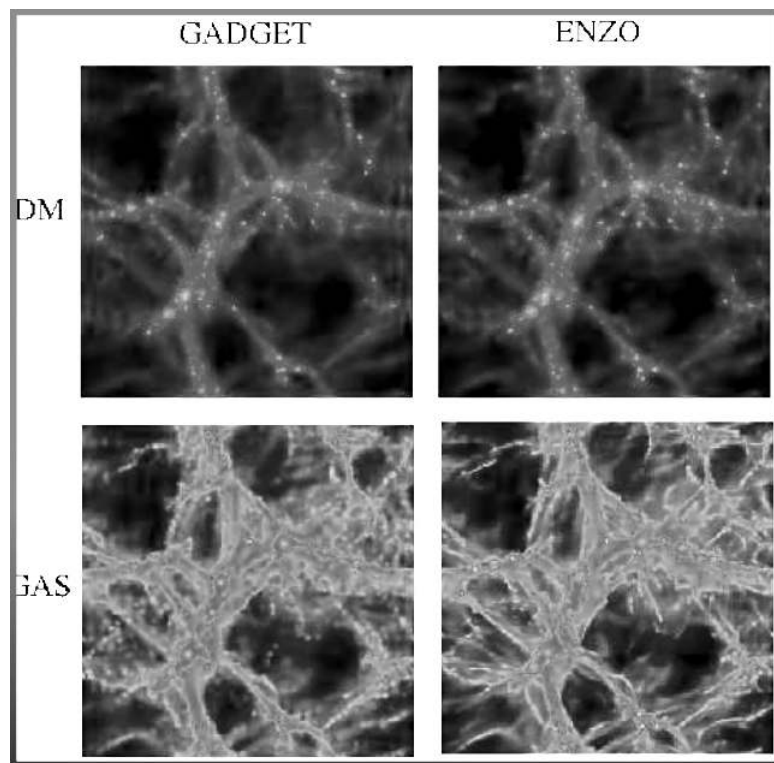


Figura 11.20: *Confronto tra i profili di densità di DM e Gas, ottenuti con Gadget ed Enzo dalle stesse condizioni iniziali, con la stessa risoluzione. [O'Shea et al. (2004)]*

Sono attualmente in corso dei test analoghi a quelli di Frenk et al. per confrontare i migliori codici per l'idrodinamica attualmente a disposizione. I risultati continuano a differire in parte, ma la situazione è ora molto più sotto controllo che nel 1999, i metodi tendono a convergere sugli stessi risultati.

La conclusione è che non esiste un metodo migliore degli altri ma dipende dal tipo di problema che si vuole affrontare:

- i metodi Euleriani hanno ottime risoluzioni in massa, poiché, grazie all'utilizzo di griglie fisse, non è necessario vincolare il numero di particelle, ma hanno risoluzioni spaziali limitate;
- i metodi Lagrangiani d'altra parte hanno il vantaggio di avere un'ottima risoluzione spaziale poiché seguono le posizioni delle particelle e ottengono risoluzioni maggiori dove è più necessario, dal punto di vista della massa invece la risoluzione è inferiore poiché aggiungendo troppe particelle i tempi di calcolo si allungano di molto.

Opinione del Professor Moscardini: “tipicamente se vogliamo simulare oggetti ad alta densità (galassie, ammassi di galassie) si consigliano i metodi Lagrangiani, che non hanno

problemi di risoluzione spaziale. In questi casi studiamo infatti valori di picco dove vanno a finire un gran numero di particelle, quindi il metodo SPH è il più adeguato. Viceversa, se vogliamo fare delle simulazioni più cosmologiche, e quindi simulare sia grandi regioni sovradense che regioni sottodense, forse i metodi Euleriani sono migliori.”

Chiudiamo il discorso mostrando qualche risultato. Cominciamo parlando del profilo di densità del gas, ci attendiamo che in qualche misura questo segua il profilo universale di NFW al quale abbiamo visto tendono i profili della DM. Essendo però il gas collisionale, fa più fatica a penetrare all'interno di una buca di potenziale. Pertanto ci si aspetta, e le simulazioni lo confermano, che il profilo del gas sia più “smooth” nelle regioni centrali, proprio perché nel suo fluire verso il minimo della buca di potenziale è in qualche modo rallentato dall'interazione collisionale. In Figura 11.21 un lavoro del buon Moscardini in cui è mostrato questo comportamento.

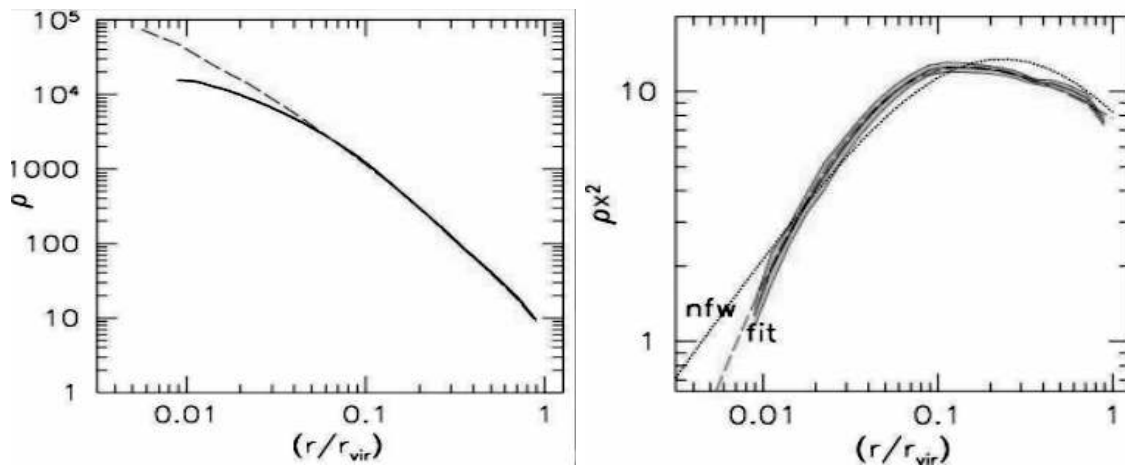


Figura 11.21: Profilo di densità (in alto) e di massa (in basso) del gas da simulazioni cosmologiche a confronto con il profilo di NFW. [Rasia, Tormen & Moscardini (2004)]

Sono stati quindi proposti dei profili alternativi per il profilo di densità del gas. Uno di questi è il **Beta-model** in cui la densità va con il raggio come

$$\rho(r) \propto (r^2 + r_c^2)^{-3\beta/2}$$

dove r_c è il raggio di core, un valore caratteristico del raggio al di sotto del quale il profilo si appiattisce, β parametrizza la pendenza e detta le caratteristiche del profilo nella regione interna.

Altra dipendenza dal raggio interessante è quella della temperatura. Mediamente la temperatura del gas nelle regioni centrali è circa costante. Si misura il grado di isothermicità degli addensamenti di gas, ci attenderemmo infatti che la temperatura fosse la stessa su tutto il profilo ma in realtà questo è vero approssimativamente solo per le regioni centrali con $r_T < 0.3r_{vir}$ (valore medio ottenuto per gli ammassi di galassie). In Figura 11.22 è riportato il risultato della stessa simulazione vista sopra.

La regione centrale è pressappoco isoterma ma c'è un crollo della temperatura nelle regioni esterne. Il profilo va come

$$T \propto \frac{r^{0.016}}{(1 + r^4/r_T)^{0.013}}$$

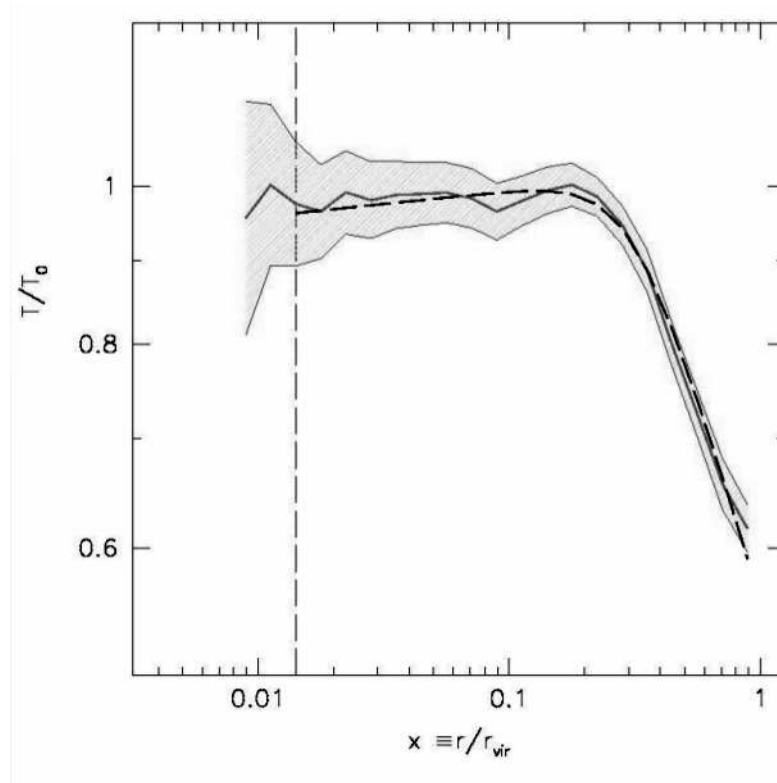


Figura 11.22: *Profilo di temperatura (l'asse spaziale è logaritmico) per un ammasso di galassie simulato, il raggio è dato in unità del raggio viriale e la temperatura in unità del valore centrale T_0 . [Rasia, Tormen & Moscardini (2004)]*

con $r_T = 0.009r_{vir}$ La termalizzazione del gas è raggiunta solo dal 30÷40% della struttura. Questo è dovuto al livello di complicazione introdotto nel codice, introducendo infatti più processi idrodinamici che coinvolgono il gas questo risultato può essere più o meno piatto.

11.6 Relazioni di Scala e Auto-Similarità

Quando sulle particelle agisce solamente la gravità e la parte di gas evolve solamente tramite processi adiabatici, cioè se il riscaldamento o il raffreddamento è prodotto dalla sola compressione o rarefazione, allora non esistono scale privilegiate nella formazione delle strutture, si dice che la crescita è **auto-similare**. Ammassi di galassie e galassie, nelle simulazioni numeriche, sono indistinguibili dal punto di vista delle proprietà idrodinamiche in azione. Questo avviene appunto perché l'unica forza in azione è la gravità e il gas, che cresce adiabaticamente, la segue. In queste condizioni nascono delle **relazioni di scala**. Tra queste ad esempio le relazioni di scala non lineari che legano la massa alla temperatura, già ricavate in precedenza.

$$T(M, z) \propto M^{2/3}(1+z)$$

Queste relazioni ci ribadiscono che gli oggetti sono completamente auto-simili l'uno con l'altro, a seconda della massa ci aspettiamo una certa temperatura.

Se la luminosità X di un ammasso è tutta dovuta a bremsstrahlung allora va con il quadrato della densità e come la radice della temperatura:

$$L_X \propto M \rho T^{1/2}$$

dove il quadrato della densità è dato come $M\rho$. Ci attendiamo quindi una relazione di scala anche per la luminosità X con la temperatura o, equivalentemente con la massa. Queste relazioni, che sottolineiamo ancora sono non lineari poiché calcolate quando $\delta > 1$, sono riprodotte dalle simulazioni N-body, come si vede in Figura 11.23.

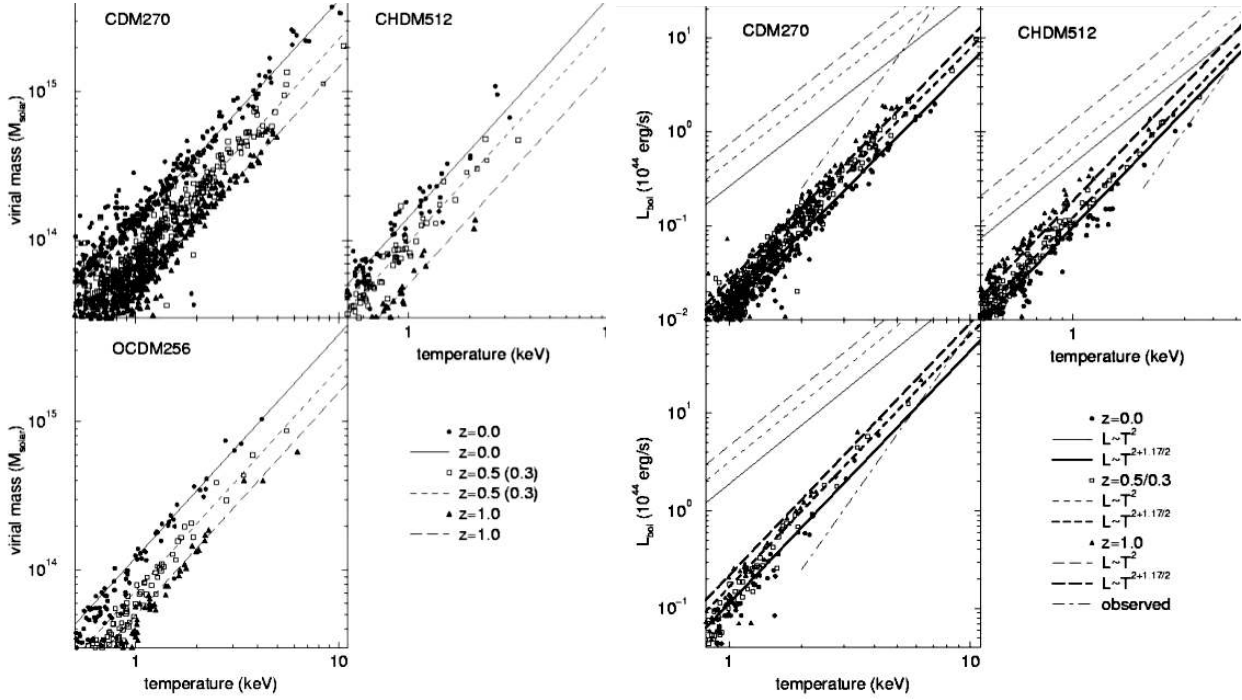


Figura 11.23: Relazioni di scala massa-temperatura e luminosità X-temperatura, come risultano da simulazioni adiabatiche con diversi modelli cosmologici (la scala è logaritmica). [Bryan & Norman (1998)]

In figura le rette continue rappresentano la relazione attesa, come dalle formule sopra, a $z = 0$, quelle tratteggiate rappresentano la relazione attesa traslata a redshift diversi, i punti invece sono i valori trovati con le simulazioni cosmologiche. Risulta evidente che, nonostante uno scatter piuttosto ampio, tali relazioni di scala sono riprodotte dalle simulazioni, a prescindere dal modello cosmologico. Nel caso della relazione massa-luminosità la relazione è esattamente la stessa, nel caso della relazione luminosità temperatura le relazioni seguite hanno un'inclinazione diversa dalle attese, dovuta a problemi di risoluzione che però possono essere corretti analiticamente. Anche la relazione massa-luminosità è riprodotta e anche in questo caso ci sono delle correzioni da apportare. In ogni caso il risultato importante è che le simulazioni riproducono uno scaling previsto dalla teoria per le reazioni adiabatiche.

Il problema però è che gli oggetti reali non seguono lo scaling auto-similare delle simulazioni e della teoria non lineare. Prendendo in esame la relazione L-T, gli oggetti reali seguono una relazione

$$L_X \propto T^3$$

per temperature $T > 2\text{keV}$ e si irripidiscono sotto a $T \approx 1\text{keV}$ (sotto la scala dei gruppi). Questo ci dice che sappiamo simulare bene il gas in condizioni adiabatiche, il quale segue le

leggi viste prima, cosa che però gli oggetti non fanno. Quindi nell'idrodinamica degli oggetti veri (ammassi e gruppi di galassie) devono esistere dei processi radiativi che avvengono al di fuori della condizione di adiabaticità. In particolare questi oggetti devono produrre delle deviazioni dalle relazioni previste teoricamente, non deve essere realizzata l'auto-similarità e quindi i gruppi di galassie devono presentare delle differenze dagli ammassi. Tali deviazioni dovranno essere più grandi quanto più piccoli sono gli oggetti considerati. Un problema analogo esiste anche per il profilo di entropia ma la trattazione sarà simile.

I motivi per cui gli oggetti deviano dalle relazioni di scala previste e quindi dall'auto-similarità sono essenzialmente due:

- il **riscaldamento non gravitazionale**: sono presenti sorgenti interne all'ammasso che inniettano energia nel mezzo, tali sorgenti sono tipicamente le super-novae e gli AGN. Questo feedback energetico agisce molto sugli oggetti piccoli, ma influenza meno quelli grandi, semplicemente perché a parità di energia emessa da una di queste sorgenti (sappiamo ad esempio che l'energia emessa dalle SN II è sempre di circa 10^{51}erg), questa rappresenta una percentuale importante del bilancio energetico totale in un oggetto piccolo (come in un gruppo), mentre risulta più trascurabile in un oggetto grande.
- il **raffreddamento radiativo**: questo fenomeno, che agisce contemporaneamente al riscaldamento non gravitazionale, introduce una scala di entropia caratteristica e selettivamente rimuove il gas di bassa entropia in maniera efficiente $t_{\text{cool}} < t_H$. Ciò porta ad un aumento dell'entropia della fase calda del gas e quindi ad una conseguente diminuzione della luminosità X negli oggetti piccoli.

Il problema vero dal punto di vista delle simulazioni è che questi fenomeni sono generati su scale molto piccole: le supernovae nascono da stelle che terminano la loro vita quindi siamo su scale con dimensioni dell'ordine delle particelle delle simulazioni N-body, ma anche gli AGN si sviluppano su scale troppo piccole per la risoluzione delle tipiche simulazioni cosmologiche. Per poter implementare in maniera fisica questi fenomeni non adiabatici nelle simulazioni dovremmo avere risoluzione che arrivi alla scala delle SN in sistemi che contano $10^{14 \div 15} M_{\odot}$ complessive. Nel caso invece dei processi radiativi di raffreddamento sarebbe necessario introdurre una trattazione fisica diversa che complicherebbe non poco le equazioni. Si ricorre quindi a dei "trucchi" per ovviare al problema della troppo grande risoluzione richiesta. Tipicamente la più piccola scala raggiungibile in termini di risoluzione in massa nelle simulazioni è dell'ordine di $10^{5 \div 6} M_{\odot}$, consideriamo allora questa la nostra una particella di gas e ne seguiamo il feedback non adiabatico con delle ricette numeriche¹¹, dividendo lo spazio con una sottogriglia. Per seguirne ad esempio la storia di formazione stellare, si assume per ognuna di queste particelle una IMF, da cui si calcola il numero di SN che ad un certo punto esploderanno e quindi si calcola il feedback energetico che queste genererebbero. Questo feedback energetico viene fatto "apparire manualmente" nella simulazione quando necessario, passo dopo passo.

Agire in questo modo complica la simulazione non poco ma permette di arrivare a risultati realistici. In Figura 11.24 è riportata la "mappa" di un ammasso di galassie simulato con questi metodi.

In questa mappa è visibile un raggruppamento di oggetti nella regione centrale che produce la formazione delle galassie cD reali, più un'altra serie di agglomerati di stelle che

¹¹Questo gas è in grado di formare stelle? Con che IMF? quante sono le stelle che termineranno la propria vita come SN? Qual'è il contributo energetico che queste immettono? A che tempo?

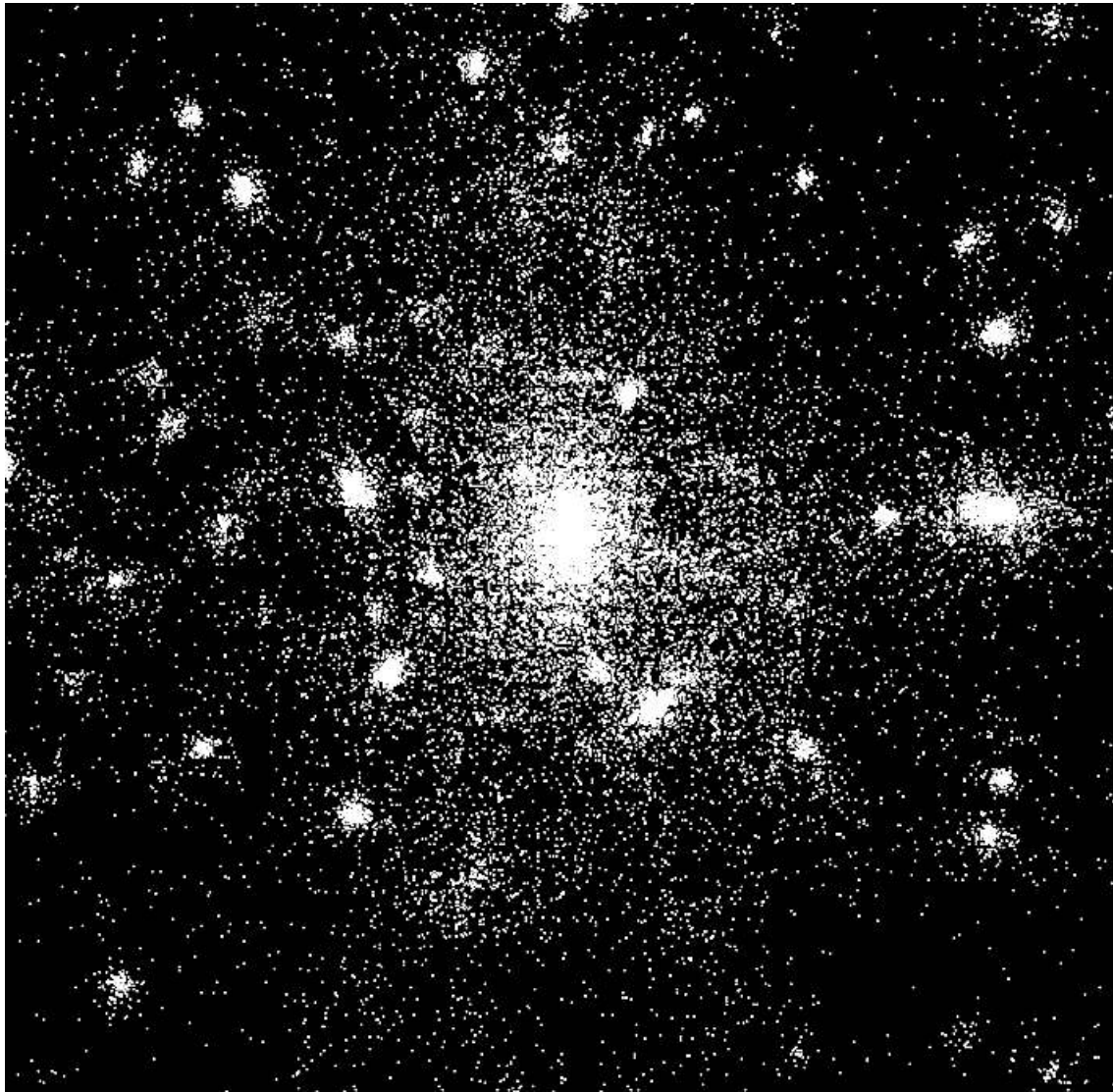


Figura 11.24: *Ammasso di galassie simulato con metodi che prevedono l'azione di interazioni non adiabatiche.*

costituiscono le altre galassie dell'ammasso. Nella simulazione in figura sono generati circa 400 agglomerati con più di 10^4 particelle e sono riprodotte le proprietà di scala della luminosità X dell'ammasso. Viene inoltre considerato il contributo del background soft-X dovuto al gas diffuso e l'effetto S-Z. È reso possibile confrontare le masse degli agglomerati di particelle e studiarne l'emissione X, il lensing, l'emissione ottica e l'effetto S-Z. È inserita la luce intracluster diffusa in modo statistico ed è possibile effettuare simulazioni zoommate di agglomerati di oggetti o altre regioni interessanti ed è infine possibile popolare il box con galassie simulate o SAM.

La storia però non finisce qui (ma quasi). I problemi sono molto di più e si è cominciato recentemente ad affrontarli in maniera rigorosa nelle simulazioni. Esistono infatti gli AGN negli ammassi di galassie che creano bubbles di gas riscaldato (osservate in X con il satellite Chandra in diversi ammassi). Si hanno poi fenomeni di turbolenza, visibili anche questi in banda X, se non considerati nelle simulazioni si rischia di avere delle mappe di temperatura completamente inaffidabili. Non bisogna infine dimenticare la presenza del campo magnetico, che "porta con sé" la necessità di aggiungere un nuovo set di equazioni nelle simulazioni, poiché la sua influenza nella storia di formazione delle strutture non è trascurabile. Tutti questi ingredienti elencati ora si è cominciato negli ultimi anni ad aggiungerli nelle simulazioni. Con l'inserimento del feedback da AGN ad esempio viene rotta la piatezza dei profili di temperatura anche nelle regioni centrali degli ammassi (dove la trattazione adiabatica ci garantiva invece l'isotermicità). Si è riusciti a riprodurre le mappe di rotazione di faraday con l'introduzione di termini di campo magnetico. La turbolenza è stata modellata in maniera più esaustiva di quanto veniva fatto in precedenza, il termine di viscosità artificiale che solitamente si introduce porta infatti ad una cancellazione delle turbolenze per tenere sotto controllo il codice. Si sono sviluppati codici in cui l'equazione di Eulero è sostituita da quella di Navier Stokes, che porta ad una migliore riproduzione delle morfologie: maggiore stripping e maggiore entropia generata negli shock. Vengono introdotti anche dei termini di conduzione termica, che tendono ad omogenizzare la temperatura. Le incertezze nei nuovi codici per modellare questi fenomeni sono molte, inoltre la complicazione dei codici è gravosa sia dal punto di vista realizzativo che da quello dei tempi di calcolo; ma si muovono i primi passi verso una trattazione esaustiva ed efficiente.

L'ultimo osservabile di cui non abbiamo ancora parlato è la chimica, in particolare si riescono a misurare le abbondanze dei metalli negli ammassi di galassie grazie allo studio degli spettri X. Per riprodurre l'arricchimento in metalli nelle nostre simulazioni si possono sfruttare gli stessi modelli semianalitici usati per implementare il contributo delle supernovae all'arricchimento energetico (del resto sono due fenomeni collegati). Si riesce a riprodurre i gradienti di metallicità osservati negli ammassi.

Introdurre tutte queste complicazioni nei codici non è puro masochismo ma serve ad avere nuovi osservabili con i quali testare le teorie di formazione delle strutture.

Possiamo concludere dicendo che buona parte dell'evoluzione non lineare delle strutture oggi si può e si deve studiare con le simulazioni numeriche. Tutto quello che riguarda il simulare i fenomeni che dipendono dalla sola gravità sono ad oggi molto sicure e sotto controllo, gli unici problemi derivano dai tempi di calcolo. Ma le più grandi difficoltà vengono dallo studio dei barioni, le tecniche numeriche convergono ma solamente se vengono considerati i processi radiativi. Questo significa dover introdurre una serie di complicazioni che rendono però i risultati molto dipendenti dal codice.

Capitolo 12

Proprietà di Clustering

Con il termine clustering si intende la tendenza delle strutture nell'Universo a raggrupparsi in addensamenti, studiare le proprietà di clustering significa quindi effettuare uno studio della struttura su grande scala dell'Universo. Tale studio viene effettuato in maniera statistica, faremo uso della **funzione di correlazione** che avevamo introdotto nella Sezione 10.1. Questa funzione offre una descrizione delle proprietà di clustering di un set di punti distribuiti nello spazio. Sappiamo che la funzione di correlazione e lo spettro di potenza sono una coppia di trasformate di Fourier

$$P(k) \xrightarrow{\text{a-FFT}} \xi(\mathbf{r})$$

$$\xi(\mathbf{r}) \xrightarrow{\text{FFT}} P(k)$$

con

$$P(k) \propto \langle |\delta_k^2| \rangle$$

$$\xi(\mathbf{r}) = \langle \delta(\mathbf{x})\delta(\mathbf{x} - \mathbf{r}) \rangle \quad (12.1)$$

dove i valori sono mediati su tutto il volume dell'Universo. Dal punto di vista di uno studio teorico si preferisce utilizzare lo spettro di potenza per tutte le proprietà che abbiamo visto sono in grado di semplificarci la vita. A livello osservativo si predilige invece la funzione di correlazione, se non altro perché è definita nello spazio reale. Nonostante sia definita sullo spazio tridimensionale, vedremo che se ne può trovare un'equivalente nello spazio proiettato bidimensionale.

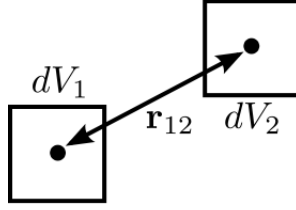
12.1 Funzione di Correlazione a 2 Punti

Consideriamo un volume infinitesimo di Universo δV_1 e supponiamo che la densità numerica media di materia¹ sia $\bar{n}$, la probabilità² di avere un oggetto entro il volume considerato è

$$\delta P = \bar{n} \delta V_1$$

¹a mio modestissimo parere sarebbe più corretto dire “di oggetti”

²Attenzione alla notazione! Qui usiamo “ δ ” per indicare quantità differenziali ma quando parliamo di spettro di potenza lo stesso simbolo indica vere e proprie quantità fisiche (sebbene adimensionali), fare quindi attenzione: “ δV ” è un volume piccolo, “ $\delta(\mathbf{x})$ ” è una quantità con significato fisico, espressa in funzione della posizione $\mathbf{x}$.



Se consideriamo ora un altro volume δV_2 posto a distanza $r_{1,2}$ dal primo, supponendo che i due volumi siano completamente scorrelati, la probabilità congiunta di avere un oggetto in ognuno dei due volumi è

$$\delta^2 P = \bar{n}^2 [1 + \xi(\mathbf{r}_{1,2})] \delta V_1 \delta V_2 \quad (12.2)$$

con $\xi(\mathbf{r}_{1,2})$ che in questo caso è detta **funzione di correlazione spaziale a due punti** (galassia-galassia) e rappresenta l'eccesso di probabilità rispetto ad una distribuzione uniforme randomica.

Si possono quindi verificare tre possibilità:

- $\xi(\mathbf{r}_{1,2}) = 0$, gli oggetti sono completamente scorrelati, abbiamo una **distribuzione casuale**;
- $\xi(\mathbf{r}_{1,2}) > 0$, c'è **correlazione**, la probabilità di trovare un oggetto in ognuno dei due volumi è maggiore di quella di una distribuzione random;
- $\xi(\mathbf{r}_{1,2}) < 0$, c'è **anticorrelazione**, la probabilità di trovare un oggetto in ognuno dei due volumi è minore di quella di una distribuzione random.

I valori che può assumere la funzione di correlazione non spaziano su tutta la retta reale ma sono hanno un limite inferiore teorico, infatti, per definizione, la probabilità deve essere una quantità compresa tra zero e uno, $0 \leq \delta^2 P \leq 1$. Questo significa che

$$\xi \geq -1$$

sempre. Questa definizione di funzione di correlazione (12.1), legata alla probabilità di avere due oggetti distinti in due volumi distinti, è chiamata **modello discreto**.

Quella che vogliamo andare a ricavare ora è la funzione di correlazione nel cosiddetto **modello continuo**. Prendiamo una distribuzione di particelle tutte di massa uguale m , la densità, ovvero quante particelle abbiamo per unità di volume in un intorno della posizione $\mathbf{x}$, è data da

$$\rho(\mathbf{x}) := n(\mathbf{x})m$$

ed è detta **densità di massa**. Possiamo definire anche una **densità di background** nella quale entra la densità numerica media:

$$\rho_b := \bar{n}m$$

Le due quantità sono collegate:

$$\rho(\mathbf{x}) = \frac{n(\mathbf{x})}{\bar{n}} \rho_b$$

$$n(\mathbf{x}) = \frac{\rho(\mathbf{x})}{\rho_b} \bar{n}$$

da cui quindi la probabilità di avere un oggetto nel punto $\mathbf{x}$ è data dalla

$$dP(\mathbf{x}) = n(\mathbf{x}) dV = \frac{\rho(\mathbf{x})}{\rho_b} \bar{n} dV \quad (12.3)$$

La probabilità di avere due oggetti in due volumi a distanza $\mathbf{r}$ invece è

$$d^2P(\mathbf{r}) = dV_1 dV_2 \langle n(\mathbf{x} + \mathbf{r})n(\mathbf{x}) \rangle = \bar{n}^2 dV_1 dV_2 \frac{\langle \rho(\mathbf{x} + \mathbf{r})\rho(\mathbf{x}) \rangle}{\rho_b^2}$$

nella quale sostituiamo con la (12.2) e con la (12.3) per ottenere

$$1 + \xi(\mathbf{r}) = \frac{\langle \rho(\mathbf{x} + \mathbf{r})\rho(\mathbf{x}) \rangle}{\rho_b^2}$$

che, ricordando $\delta = \frac{\delta\rho}{\rho} = \frac{\rho(\mathbf{x}) - \rho_b}{\rho_b}$, diventa

$$\xi(\mathbf{r}) = \langle \delta(\mathbf{x} + \mathbf{r})\delta(\mathbf{x}) \rangle$$

Nota questa relazione, possiamo usare la funzione di correlazione per calcolare qual'è la probabilità $dP(1, 2)$ di avere due galassie in due volumi dV_1 e dV_2 a distanza $\mathbf{r}_{1,2}$, che sarà data dal prodotto tra la probabilità di avere un oggetto in dV_1 per la probabilità condizionata di avere un oggetto in dV_2 se è presente un oggetto in dV_1 :

$$dP(1, 2) = dP(1) \times dP(2|1)$$

riscrivendo la (12.2) come

$$d^2P = (\bar{n}^2 dV_1) \times \bar{n} dV_2 [1 + \xi(\mathbf{r}_{1,2})]$$

è evidente che

$$dP(1) \equiv \bar{n}^2 dV_1$$

$$dP(2|1) \equiv \bar{n} dV_2 [1 + \xi(\mathbf{r}_{1,2})]$$

Possiamo allora trovare il numero di oggetti contenuti entro un raggio $\mathbf{r}$ intorno ad un oggetto dato, tale quantità è data dall'integrale

$$N(< r) = \int_V dP(2|1) = \int_V \bar{n} dV_2 [1 + \xi(\mathbf{r}_{1,2})]$$

passiamo in coordinate sferiche (e moltiplichiamo quindi per il determinante dello Jacobiano r^2 nell'integrale):

$$N(< r) = \frac{4\pi}{3} \bar{n} r^3 + 4\pi \bar{n} \int_0^r r'^2 \xi(r') dr' \quad (12.4)$$

dove il primo termine al secondo membro rappresenta la probabilità di avere un oggetto entro il raggio r (è la probabilità di una distribuzione random) e il secondo termine è l'eccesso o il difetto rispetto alla probabilità casuale di avere altri oggetti entro il raggio r , ed è dovuta alla presenza di correlazione o anticorrelazione, rispettivamente. Quindi per conoscere il numero di oggetti contenuti entro un certo raggio in una determinata regione dell'Universo

dovremmo conoscere l'andamento di $\xi(r)$ in quella regione e integrarla entro la distanza r usando la (12.4), conoscendo ovviamente anche la densità media di oggetti.

I dati osservativi ci dicono che la funzione di correlazione $\xi(r)$ è una legge di potenza

$$\xi(r) = \left(\frac{r}{r_0}\right)^{1-\gamma} \propto r^{-\gamma} \quad (12.5)$$

con $\gamma \sim 1.8$ e dove si è introdotto un raggio caratteristico legato alla normalizzazione della legge di potenza tipicamente dell'ordine di $r_0 \sim 5 \text{ Mpc}/h$ (per le galassie locali, cioè a $z \approx 0$) e chiamato **lunghezza di correlazione**, rappresenta la scala fisica in cui la correlazione vale 1.

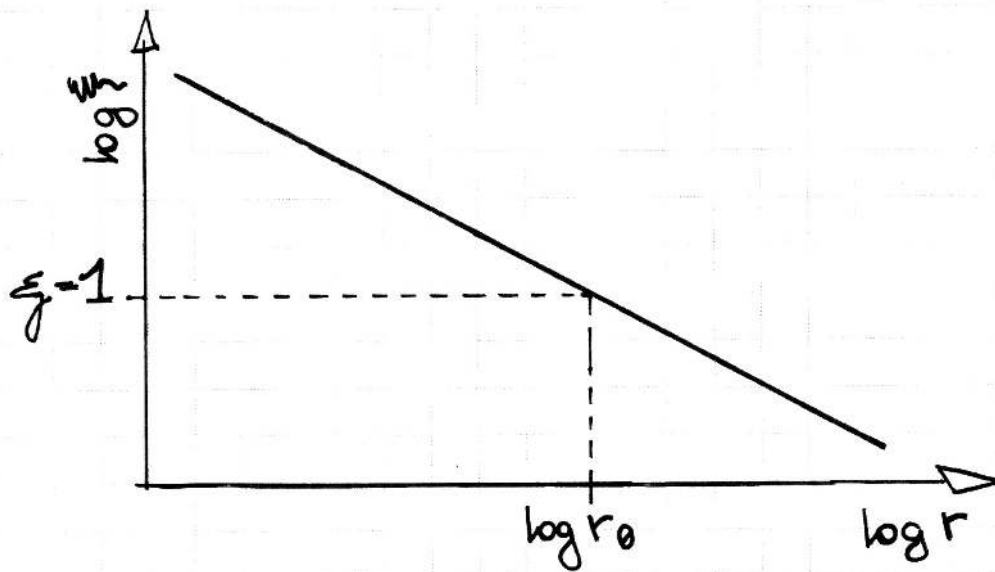


Figura 12.1: *Funzione di correlazione.*

La Figura 12.1 rappresenta la funzione di correlazione e si può vedere che, su piccola scala, la probabilità di avere oggetti vicini è maggiore di quella di averne di lontani, del resto $\xi(r)$ è una legge di potenza, quindi le scale privilegiate sono quelle più piccole. Questa è la **regola di Zwicky**³: le galassie tendono ad essere più correlate su scale piccole, ovvero è più facile trovare una galassia se osservo intorno ad altre galassie (le galassie soffrono di solitudine). La funzione di correlazione però non può avere la forma (12.5) su tutte le scale. Se $r \rightarrow \infty$ ci aspettiamo che il numero di conteggi tenda alla densità media dell'Universo, cioè il numero di oggetti deve essere uguale al primo termine della (12.4), per definizione. Ciò significa che l'integrale al secondo termine si deve annullare

$$\int_0^r r'^2 \xi(r') dr' \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$$

La funzione di correlazione dovrà essere negativa su grandi scale per compensare, all'interno dell'integrale, la parte positiva su piccole scale, altrimenti il secondo termine non può diventare zero per raggi infiniti⁴. Questo però significa che a raggi grandi $\xi(r)$ la legge di potenza osservativa non è valida (N.B. se abbiamo $\xi < 0$ non possiamo rappresentarlo in scala

³Zwicky è il tipo che ha scoperto gli ammassi di galassie...

⁴Quando integro tra due estremi a e b , sto facendo una somma di contributi infinitesimi. Se nell'intervallo $a - c$ (con $a < c < b$) l'integrale è positivo, perché il totale venga nullo ho bisogno che nella restante parte $c - b$ l'integrale sia negativo (e sia uguale in modulo alla prima parte).

logaritmica come in Figura 12.1). Abbiamo quindi scoperto che la funzione di correlazione su grande scala deve essere negativa per compensare che la osserviamo positiva su piccola scala.

Fin qui abbiamo trovato quanti oggetti si possono trovare entro un raggio fissato, centrato su un particolare oggetto. Vogliamo ora vedere cosa succede ai conteggi (N) se considero delle celle in posizioni completamente casuali. Si divide l'Universo in tanti piccoli volumi δV_i , di dimensioni tali da contenere o un oggetto o nessuno. Mi aspetto che in ogni volumetto i -esimo siano contenuti in media

$$\langle n_i \rangle = \bar{n} \delta V_i$$

oggetti. Poiché gli oggetti che possono essere contenuti sono solo 0 o 1, la media $\langle n_i \rangle$ può valere 0 o 1 ma questo significa che anche la varianza $\langle n_i^2 \rangle$ e tutti gli altri momenti di ordine superiore potranno avere solo questi due valori, poiché qualsiasi potenza di 0 e 1 da 0 e 1:

$$\langle n_i \rangle = \langle n_i^2 \rangle = \langle n_i^3 \rangle = \dots = \langle n_i^N \rangle \quad (12.6)$$

Il numero medio di oggetti contenuti in un volume V scelto a caso nell'Universo (**momento primo**) sarà

$$\langle N \rangle_V = \int_V dV_i = \sum_i \langle n_i \rangle = \bar{n} \sum_i \delta V_i = \bar{n} V \quad (12.7)$$

calcoliamo allora la varianza dei conteggi (cioè il **momento secondo**):

$$\langle N^2 \rangle_V = \left\langle \sum_i n_i \sum_j n_j \right\rangle = \sum_{i,j} \langle n_i^2 \rangle + \sum_{i \neq j} \langle n_i n_j \rangle \quad (12.8)$$

ma per la (12.6) il termine $\sum_{i=j} \langle n_i^2 \rangle = \sum_i \langle n_i \rangle = \bar{n} V$, il secondo termine invece, per la (12.2) diventa

$$\sum_{i \neq j} \langle n_i n_j \rangle = \bar{n}^2 \int dV_i dV_j [1 + \xi(r)] = \bar{n}^2 V^2 + \bar{n}^2 \int dV_i dV_j \xi(r)$$

quindi abbiamo

$$\begin{aligned} \langle N^2 \rangle_V &= \bar{n} V + \bar{n}^2 V^2 + \bar{n}^2 \int dV_i dV_j \xi(r) \\ \langle N^2 \rangle_V &= \langle N \rangle + \langle N \rangle^2 + \bar{n}^2 \int dV_i dV_j \xi(r) \end{aligned} \quad (12.9)$$

La (12.9) è la varianza dei conteggi. Vogliamo calcolare allora anche il **momento centrale** (il momento di ordine 2 centrato sul valor medio)

$$\mu_2 := \langle (N - \langle N \rangle)^2 \rangle = \langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2 = \langle N \rangle + \bar{n}^2 \int dV_i dV_j \xi(r)$$

Potremmo allora volere il tutto in termini di fluttuazioni, definiamo quindi

$$\Delta := \frac{\delta N}{N} = \frac{N - \langle N \rangle}{\langle N \rangle}$$

il valore medio sarà allora $\langle \Delta \rangle = 0$, mentre la varianza

$$\langle \Delta^2 \rangle = \frac{\mu_2}{\langle N \rangle^2} = \frac{1}{\langle N \rangle} + \frac{\bar{n}^2}{\langle N \rangle^2} \int dV_i dV_j \xi(r)$$

dove $\frac{\bar{n}^2}{\langle N \rangle^2} = \frac{1}{V^2}$ e dove il termine $\frac{1}{\langle N \rangle}$ è detto **Shock Noise**.

L'idea quindi è che se prendessimo dei punti a caso nell'Universo e contassimo quanti oggetti sono contenuti in volumi di dimensione fissata, avremmo che il numero medio di oggetti contati sarebbe dato dalla (12.7), con una varianza nei conteggi data dalla (12.8) che dipende tramite un integrale dalla funzione di correlazione. Le altre quantità che abbiamo trovato non sono altro che forme alternative per esprimere gli stessi concetti, μ_2 da la deviazione rispetto al valore medio, e con Δ abbiamo le fluttuazioni nei conteggi. Per quanto riguarda le fluttuazioni nei conteggi vediamo che le deviazioni dal valore medio $\langle \Delta^2 \rangle$ dipendono da due termini: anche se la distribuzione degli oggetti nell'Universo fosse completamente casuale ($\xi(r) = 0$), avremmo comunque una certa varianza data dallo shock noise, questa deviazione è il rumore Poissoniano e non può essere eliminato a meno che non facciamo un numero infinito di conteggi, questo perché i conteggi sono numeri discreti⁵. Tale rumore non è legato al clustering che stiamo studiando, ciò nonostante non può essere evitato. È il secondo termine quello di interesse astrofisico ed è legato alla non omogenea distribuzione delle galassie nell'Universo. Più è alta la funzione di correlazione maggiore sarà la varianza nei conteggi delle galassie, è così possibile misurare la funzione di correlazione, e quindi stimare il clustering, anche usando direttamente i conteggi.

Per le galassie di oggi la funzione di correlazione va come dato dalla (12.5):

$$\xi(r) = \left(\frac{r}{5 \text{Mpc } h^{-1}} \right)^{-1.8}$$

ma la normalizzazione a $5 \text{Mpc } h^{-1}$ mi dice che la funzione decresce molto velocemente rispetto alle scale tipiche della cosmologia⁶, ciò significa che è un segnale estremamente debole da misurare⁷. Nel momento in cui però noi facciamo dei conteggi, stiamo calcolando implicitamente l'integrale

$$\int_0^r r'^2 \xi(r')$$

e quindi stiamo misurando la funzione di correlazione in forma cumulativa, più andiamo a raggi grandi più il suo valore cresce, contrariamente a quanto succederebbe misurandola direttamente. Misurare $\xi(r)$ sotto forma di integrale quando andiamo a raggi molto grandi si preferisce, poiché ci consente di sfruttare il volume molto grande in cui lo integriamo per alzarne il valore sopra il livello di sensibilità degli strumenti.

Calcolare delle stime della funzione di correlazione direttamente è possibile tramite le survey di oggetti cosmologici. Quando abbiamo una survey di N oggetti su un determinato volume di Universo, misuriamo quante coppie di oggetti esistono all'interno di una sfera (o all'interno di una circonferenza nel caso di proiezioni bidimensionali) di raggio fissato r , ottenendo così il valore $DD(r)$, (data-data). Fatto questo generiamo una distribuzione completamente casuale di N punti su un volume uguale e calcoliamo quante coppie di oggetti esistono all'interno di una sfera dello stesso raggio r , ottenendo il valore $RR(r)$, (random-random). La stima della funzione di correlazione sarà allora data da

⁵E quindi se il valore medio è 7,3 una volta misuro 7 e un'altra misuro 8, quindi c'è sempre un margine di errore. Lo shock noise è un vero e proprio rumore e non ha nessuna motivazione fisica.

⁶La (12.5) ci dice che a 5Mpc la ξ vale già 1, a 10Mpc vale meno di 0.25, va molto velocemente a zero!!!

⁷Vedremo più avanti come si misura all'atto pratico.

$$1 + \hat{\xi}(r) = \frac{DD(r)}{RR(r)}$$

Il problema dell'usare questa metodologia è che spesso e volentieri una survey è contaminata da degli effetti di selezione (bias). Esistono però dei modi per correggere le stime, ad esempio si può calcolare

$$\hat{\xi}(r) = \frac{DD(r) + RR(r) - 2DR(r)}{RR(r)}$$

dove $DR(r)$ sono le coppie formate da un dato vero e da un dato casuale.

Facciamo un'ultima osservazione. Tutte queste considerazioni noi le abbiamo fatte sottintendendo che le galassie fossero distribuite 3-dimensionalmente nell'Universo. Per testare questa supposizione prestiamo attenzione alla relazione (12.4), essa contiene anche un'informazione sulla topologia dell'Universo. Se le strutture nell'Universo fossero distribuite su grande scala su volumi 3-dimensionali avremmo $N(< r) \propto r^3$. Se invece, per un qualche motivo, le strutture si distribuissero su dei piani i conteggi andrebbero come $N(< r) \propto r^2$ e, allo stesso modo se avessimo una distribuzione lungo dei filamenti (distribuzione unidimensionale) allora $N(< r) \propto r^1$. Abbiamo detto che la funzione di correlazione ha una forma data dalla (12.5) con $\gamma \sim 1.8$, allora il numero di conteggi scala con il raggio come

$$N(< r) \propto \int r^2 \xi(r) dr \propto \int r^2 r^{-\gamma} dr = \int r^{2-1.8} dr = \int r^{0.2} dr \propto r^{1.2}$$

dove l'indice 1.2 è detto **indice frattale**⁸. Questo ci dice che apparentemente gli oggetti dell'Universo sono distribuiti tutt'altro che 3-dimensionalmente ma piuttosto lungo dei filamenti mono-dimensionali.

12.2 Funzione di Correlazione a N Punti

Abbiamo visto nella (12.9) che la funzione di correlazione **a due punti** ci da una misura del momento secondo (la varianza) di una distribuzione. Ma questo non ci stupisce molto in quanto avevamo visto in precedenza che anche lo spettro di potenza di una distribuzione ha un legame stretto con la varianza⁹, essendone l'antitrasformata di Fourier, è intuitivo che anche ξ debba avere questo legame. Sappiamo inoltre che una distribuzione Gaussiana normale è completamente descritta dal momento secondo, ma se vogliamo descrivere accuratamente una distribuzione più complessa avremo bisogno anche dei **momenti di ordine superiore**. Per questo motivo vedremo ora come si trovano le funzioni di correlazione a più punti.

Vediamo come si costruisce la **funzione di correlazione a 3 punti**. Consideriamo 3 volumi scorrelati δV_1 , δV_2 , δV_3 , la probabilità di avere contemporaneamente un oggetto in ognuno di questi tre volumi è

$$d^3P = \bar{n}^3 dV_1 dV_2 dV_3 [1 + \xi_3(r_{1,2}, r_{1,3}, r_{2,3})]$$

dove la funzione di correlazione a tre punti $\xi_3(r_{1,2}, r_{1,3}, r_{2,3})$ è definita come funzione di tre variabili ma, poiché si tratta dei tre vertici di un triangolo, le variabili indipendenti sono in realtà due. La ξ_3 è detta anche **funzione di correlazione a 3 punti completa**, poiché in

⁸Credo che il termine "indice frattale" avrebbe indicato qualsiasi indice α poteva assumere $N(< r) \propto r^\alpha$.

⁹Integrando $P(k)$ otteniamo una misura della varianza.

realtà contiene un'informazione che è ridondante. Noi stiamo infatti considerando le triplette di punti ma, poiché le coppie di punti sono accoppiate dalla funzione di correlazione a due punti già vista, quindi anche la ξ_3 vi dipende. Se enucleiamo la funzione a 3 punti completa troviamo

$$\xi_3(r_{1,2}, r_{1,3}, r_{2,3}) = \xi(r_{1,2}) + \xi(r_{1,3}) + \xi(r_{2,3}) + \xi_{3,red}(r_{1,2}, r_{1,3}, r_{2,3})$$

Il termine $\xi_{3,red}(r_{1,2}, r_{1,3}, r_{2,3})$ è detto **funzione di correlazione a 3 punti ridotta** ed è il vero segnale cosmologico aggiuntivo che cerchiamo (l'informazione contenuta negli altri termini la otteniamo già calcolando il momento secondo).

Se volessimo ottenere la **funzione di correlazione a 4 punti** dovremmo seguire un procedimento esattamente analogo a quello fatto per la 3-punti, avremmo la probabilità data da

$$d^4P = \bar{n}^4 dV_1 dV_2 dV_3 dV_4 [1 + \xi_4]$$

la funzione ξ_4 va poi enucleata sia dalle coppie che dalle triplette. Per una descrizione completa di un sistema di N punti avremmo bisogno delle funzioni di correlazione fino all' $N - 1$ -esimo ordine.

12.3 Funzione di Correlazione Angolare

Per semplificarci la vita potremmo, invece di considerare le funzioni di correlazione 3-dimensionali, usare la versione angolare. Trasferiamo allora il problema in coordinate sferiche e non consideriamo la dimensione raggio r , per evitare le difficoltà legate al suo calcolo. In questa maniera stiamo considerando la distribuzione degli oggetti proiettati sul piano della sfera celeste. Presi allora due angoli solidi infinitesimi $\delta\Omega_1$ e $\delta\Omega_2$ separati da un angolo θ , la probabilità di avere un oggetto all'interno di $\delta\Omega_2$ se è presente un oggetto in $\delta\Omega_1$ è data da

$$d^2P = \bar{n}_\Omega^2 \delta\Omega_1 \delta\Omega_2 [1 + w(\theta)]$$

dove in questo caso abbiamo definito la **funzione di correlazione angolare**, $w(\theta)$, che dipende dalla separazione angolare delle posizioni piuttosto che dalle distanze fisiche. Osservativamente $w(\theta)$ è fittata da una legge di potenza

$$w(\theta) \propto \theta^{-\delta}$$

dove l'esponente δ è legato a quello della funzione di correlazione a 2 punti $\gamma \sim 1.8$. Proiettando sul piano del cielo, infatti, perdiamo una dimensione (vediamo più oggetti vicini di quanti in realtà non ce ne siano, per effetti di proiezione), avremo quindi che $\delta = \gamma - 1$.

Esiste una relazione formale che ci permette, data una distribuzione spaziale, di stabilire com'è fatta quella angolare. Vediamo allora come si ricava la

Relazione di Limber: Consideriamo la funzione di massa, scritta sotto forma di funzione di Schechter:

$$\Phi(L) \propto L^{-\alpha} \exp\left(-\frac{L}{L_*}\right)$$

che possiamo equivalentemente, trasporre in termini di magnitudine assoluta poiché vale la

$$\Phi(L) dL = F(M) dM$$

La probabilità di avere un oggetto contemporaneamente in 1 volume infinitesimo, con una magnitudine assoluta compresa tra M ed $M + dM$ (fare questa richiesta ci consente di avere un'informazione in più, porta infatti con sé l'informazione sulla distanza), è data da

$$dP = F(M) dM dV$$

La probabilità di avere contemporaneamente due oggetti in due volumi infinitesimi (angolari) è data dal prodotto tra le probabilità prese singolarmente di avere un oggetto in un volume fissato, più la probabilità che ci sia correlazione

$$d^2P = dM_1 dM_2 dV_1 dV_2 [F(M_1)F(M_2) + G(M_1, M_2, r_{1,2})]$$

dove il termine $G(M_1, M_2, r_{1,2})$ è la parte dipendente dalla funzione di correlazione. Per arrivare alla relazione di Limber dobbiamo ora fare delle assunzioni:

1. la funzione $G = G(M, r)$ può essere **separata in due parti** una dipendente dalle magnitudini e l'altra dalla distanza:

$$G(M_1, M_2, r_{1,2}) = F(M_1)F(M_2)\xi(r_{1,2})$$

questa è un'assunzione forte e sappiamo che in realtà non è possibile separare le due quantità. Stiamo infatti dicendo che, quando consideriamo degli oggetti correlati, la loro distanza da noi può essere presa come costante, così che la magnitudine ne sia egualmente affetta e possa quindi essere separata. Ma noi sappiamo che esistono gruppi di oggetti legati tra loro a comporre un sistema, le distanze tra i quali sono talmente grandi da incidere sulle magnitudini osservate (basti pensare agli ammassi di galassie). Ciò significa che effettivamente magnitudine e distanza sono legate ma l'effetto, ai fini del nostro problema, è trascurabile e possiamo quindi riscrivere la probabilità come

$$d^2P = dM_1 dM_2 dV_1 dV_2 F(M_1)F(M_2)[1 + \xi(r_{1,2})]$$

2. La distribuzione di luminosità che ci arriva dalle galassie è piccata in corrispondenza di L_* , ovvero richiediamo che il massimo di emissione sia alla magnitudine corrispondente al ginocchio della funzione di Schechter, così da poter prendere tutte le galassie con la **stessa magnitudine assoluta**¹⁰, M_* . Questa assunzione ci permette di dedurre la distanza delle galassie:

$$D_* = 10^{0.2(m-M_*)-5} [Mpc]$$

anche questa è un'assunzione forte ma ci permette di semplificare di molto i conti.

3. Consideriamo esclusivamente **angoli piccoli** così da poter ignorare la curvatura del cielo:

$$\theta \ll 1 \Rightarrow r = D_* \theta$$

quando formalmente dovremmo invece scrivere $r = D_* \sin \theta$.

¹⁰ma questo non è implicito nella prima assunzione?

Pertanto, definendo $x := \frac{r}{D_*}$, l'**equazione di Limber**, che ci permette di passare dalla funzione di correlazione a due punti a quella angolare e viceversa, si scrive

$$w(\theta) = \frac{\theta \int_0^{+\infty} F^2(x) x^5 dx \int_{-\infty}^{+\infty} \xi(D_* \theta \sqrt{1+y^2}) dy}{[\int_0^{+\infty} F(x) x^2 dx]^2} \quad (12.10)$$

solitamente questa equazione viene invertita, possiamo infatti misurare $w(\theta)$ e, conoscendo la funzione di luminosità $F(x)$, deriviamo la funzione di correlazione a due punti spaziale. Al numeratore la prima parte dell'integrale (quella da zero a infinito) è dovuta al fatto che sto proiettando lungo la direzione radiale, le potenze della funzione di luminosità e della distanza servono a pesare correttamente tale proiezione. Nota: Il termine $\xi(D_* \theta \sqrt{1+y^2})$ si legge “ ξ calcolato in $(D_* \theta \sqrt{1+y^2})$ ”, la y è una variabile di integrazione e non ha significato fisico. In ogni caso l'integrale più interno al numeratore ci dice invece che più ci allontaniamo, più la funzione di correlazione tende a zero, infatti, poiché sommiamo sia valori positivi che negativi (nell'intervallo $[-\infty; +\infty]$), il segnale tende a scomparire. In sostanza ci dice che più aumenta D_* , minore è il valore di $w(\theta)$. Al denominatore abbiamo il quadrato dell'integrale della funzione di luminosità integrata in tutto il volume (il fattore x^2 deriva dal passaggio alle coordinate sferiche: $\int r^2 dr = \int dx$).

Se integrassimo questa relazione inserendo l'andamento della funzione di correlazione $\xi \propto r^{-\gamma}$, troveremmo che $w(\theta) \propto \theta^{-(\gamma-1)}$, come avevamo già anticipato.

12.4 Bias Osservativo

Abbiamo già introdotto il bias osservativo che abbiamo quando contiamo la distribuzione di galassie nella Sezione 10.1.4, niente ci assicura infatti che le galassie siano dei traccianti della distribuzione di massa nell'Universo. Esistono diversi modi per definire il bias che non sempre danno lo stesso risultato, noi l'abbiamo definito come il legame che c'è tra le fluttuazioni nel conteggio di oggetti (galassie nel nostro caso ma il concetto può essere applicato a qualsiasi tipo di oggetti cosmici ci interessino: quasar, ammassi, eccetera) e le fluttuazioni di materia nell'Universo. Se le fluttuazioni nei conteggi di galassie e le fluttuazioni di materia sono definite rispettivamente

$$\delta_g := \frac{\Delta N}{N}$$

$$\delta_M := \frac{\delta \rho}{\rho}$$

le due quantità sono legate dal parametro di bias, b :

$$\delta_g = b \delta_M$$

questo parametro è indipendente dalla scala degli oggetti che stiamo considerando. Posso definire operativamente il bias anche usando la varianza, la funzione di correlazione o lo spettro di potenza:

$$\sigma_g = b \sigma_M \quad \xi_g = b^2 \xi_M \quad P_g = b^2 P_M$$

il valore b che dovrei ottenere in linea di principio è sempre lo stesso, all'atto pratico non è propriamente vero ma facciamo finta di sì. Il b^2 che compare per ξ e P è dovuto al modo

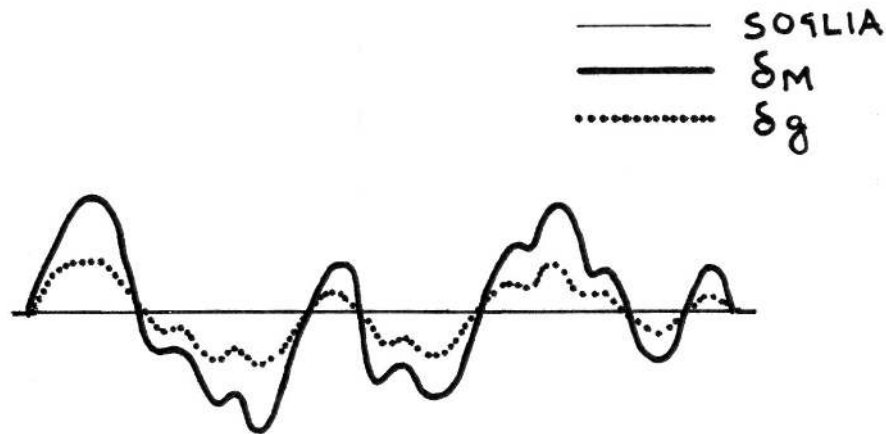


Figura 12.2: *Effetto che otteniamo introducendo il parametro di bias in approssimazione lineare. La linea tratteggiata rappresenta le fluttuazioni rispetto al valore di soglia ottenute dal conteggio degli oggetti, con l'introduzione del parametro di bias le fluttuazioni in massa ne ricalcano l'andamento ma sono amplificate, in positivo in negativo.*

in cui sono definite queste funzioni¹¹ La maniera più semplice per definire il parametro di bias è lineare in prima approssimazione. Consideriamo un valore di soglia, le fluttuazioni di oggetti definiscono il discostamento dal valore di soglia in positivo o in negativo ma non rappresentano la fluttuazione reale di materia. Per rappresentare le fluttuazioni reali si introduce appunto il parametro di bias che assume in questo contesto il senso di un'amplificazione positiva o negativa di tali fluttuazioni di oggetti. Con queste amplificazioni abbiamo una stima migliore della distribuzione delle fluttuazioni di massa, anche se niente ci assicura di aver raggiunto in questa maniera una perfetta rappresentazione (Figura 12.2).

Ci aspettiamo un andamento di questo tipo perché abbiamo visto che per formare le strutture cosmiche deve essere superata una certa soglia, in particolare l'abbiamo visto nel modello del collasso sferico in Sezione 11.1. Ma superare un valore di soglia è più facile dove il valore medio del campo di densità locale è in generale più alto. Pensando ad una scomposizione in onde del campo di densità cosmico, avremo onde lunghe ed onde corte (Figura ??), dato un valore di soglia è più probabile che le fluttuazioni di materia lo superino, e che quindi la formazione delle strutture sia possibile, in prossimità delle regioni dove abbiamo il massimo delle onde lunghe.

Ci aspettiamo quindi che, più gli oggetti sono grandi, più tendono ad essere vicini tra loro: questo significa che, ad esempio, la massa media delle galassie negli ammassi sia maggiore di quella delle galassie nei gruppi.

Per quanto detto ci attendiamo quindi che in generale il bias sia funzione crescente della massa, ma in realtà vogliamo anche che sia funzione crescente del redshift. Gli oggetti molto massicci diventano più rari a redshift elevati, ma questo significa anche che il clustering sarà maggiore, è cioè più facile trovarli vicini tra loro. Quei pochi oggetti che si formano sono tutti raggruppati. Ci attendiamo che il clustering, e quindi ξ , funzione di correlazione, o equivalentemente P , spettro di potenza, aumenti all'aumentare della massa considerata e/o del redshift considerato.

¹¹remember $\propto \langle \delta^2 \rangle$?

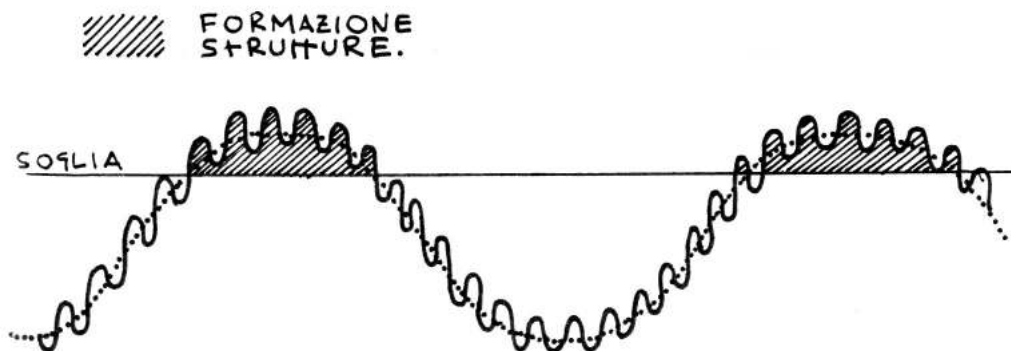


Figura 12.3: Campo di densità dell'Universo scomposto in onde lunghe ed onde corte. È indicato il valore di soglia che è necessario superare per avere la formazione delle strutture.

12.5 Variazione del Clustering con il Redshift

Le prime survey di galassie contavano migliaia o decine di migliaia di galassie, la missione Euclid che partirà nel 2020 si propone di mappare la posizione di miliardi di galassie. Le proprietà di clustering vengono studiate facendo delle fette sottili in declinazione delle mappe ottenute con le survey, ottenendo dei diagrammi a cono come quello in Figura 12.4.

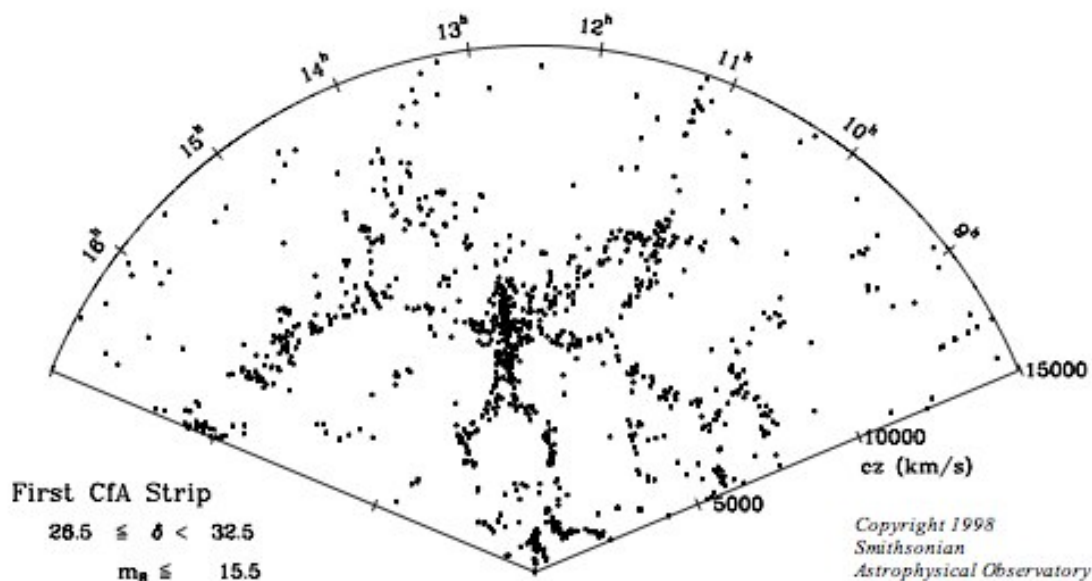


Figura 12.4: Mappa delle galassie (i puntini neri) di una survey del 1998. Si può notare la famosa figura dell'uomo stilizzato, lo "stickman", che per la prima volta portò alla luce le strutture chiamate finger of god. La posizione degli oggetti è data in funzione dell'ascensione retta e del redshift.

In questa particolare mappa, oltre che il celebre "Stickman" sono visibili le strutture chiamate **finger of god**. Queste strutture sono gruppi di oggetti all'apparenza filamentari distribuiti lungo la direzione radiale dall'osservatore, la peculiarità sta nel fatto che, ovunque si guardi nell'Universo è possibile osservarne, li vedremo più avanti.

Il problema di questo tipo di rappresentazione è che si utilizza il redshift per misurare la distanza, in virtù della legge di Hubble. La legge di Hubble però ci dice che la velocità con cui si allontanano le galassie da noi, e quindi il redshift, è proporzionale esclusivamente alla loro distanza nel caso in cui ci troviamo in un Universo omogeneo. Ma in tutta la seconda parte del corso abbiamo visto come con il passare del tempo il nostro Universo tenda a diventare sempre più disomogeneo, quindi la velocità con cui gli oggetti si muovono rispetto a noi non dipende esclusivamente dalla loro distanza ma anche da una velocità peculiare:

$$v = H(t) d + v_p$$

dove la velocità peculiare v_p è la velocità con cui una galassia si muove rispetto alle coordinate comoventi, indipendentemente cioè dal moto di deriva dovuto all'espansione dell'Universo. Poiché esiste il clustering, esisterà anche una dinamica interna dei sistemi di oggetti raggruppati, questa dinamica porterà a dei moti propri ad esempio delle galassie all'interno degli ammassi¹². Le velocità peculiari degli oggetti all'interno di sistemi gravitazionalmente legati possono arrivare anche a ordini di $10^3 km/s$ (caso di una galassia in un ammasso). L'effetto è additivo ma diventa meno importante mano a mano che ci allontaniamo in redshift¹³.

Questo fenomeno mi genera un rumore nei dati lungo una direzione preferenziale (quella radiale). Il rumore introdotto quando usiamo il redshift per misurare la distanza è dovuto soltanto alla componente lungo la linea di vista della velocità peculiare degli oggetti. Quando ci si è resi conto di questo problema si è deciso di mostrare i grafici (di funzione di correlazione, spettro di potenza, eccetera) utilizzando la funzione di correlazione proiettata. Per definirla consideriamo due galassie distanti s l'una dall'altra, per fare considerazioni sul clustering a noi servono coppie di galassie e loro distanze. Scomponiamo il vettore distanza in due componenti

$$s^2 = r_p^2 + \pi^2$$

dove r_p è la componente perpendicolare alla LdV e π è la componente parallela. Anziché calcolare normalmente la funzione di correlazione allora, integriamone la componente parallela dalla LdV, in modo da non avere risultati falsati dal moto proprio delle galassie, definiamo quindi

$$w_p(r_p) := \int_0^{+\infty} \xi(r_p, \pi) d\pi = 2 \int_{r_p}^{+\infty} s(s^2 - r_p^2)^{-1/2} \xi(s) ds$$

è la **funzione di correlazione proiettata**, indipendente dalle distorsioni dovute al redshift. Otteniamo così il valore della funzione di correlazione su un piano perpendicolare alla linea di vista, in cui la velocità peculiare degli oggetti non interferisce con le nostre misurazioni.

I risultati che otteniamo agendo in questo senso, ci confermano ciò che ci si aspetta.

La funzione di correlazione proiettata di oggetti con caratteristiche diverse ha andamenti identici a legge di potenza ma con normalizzazioni più o meno alte. Ad esempio la funzione di correlazione proiettata delle galassie early è circa parallela a quella delle galassie late, ma è tutta traslata a valori maggiori (Figura 12.5). Questo significa che le galassie dei tipi

¹²Ricordare ad esempio che la galassia di Andromeda ha addirittura un blueshift!

¹³Un contributo di $10^3 km/s$ vicino a noi si somma ad un contributo dato dal flusso di Hubble di $10^2 km/s$ allora è cruciale. Se invece vado a redshift elevati il flusso di Hubble da un contributo in velocità $\gg 10^3 km/s$ e quindi il contributo della velocità peculiare diventa trascurabile

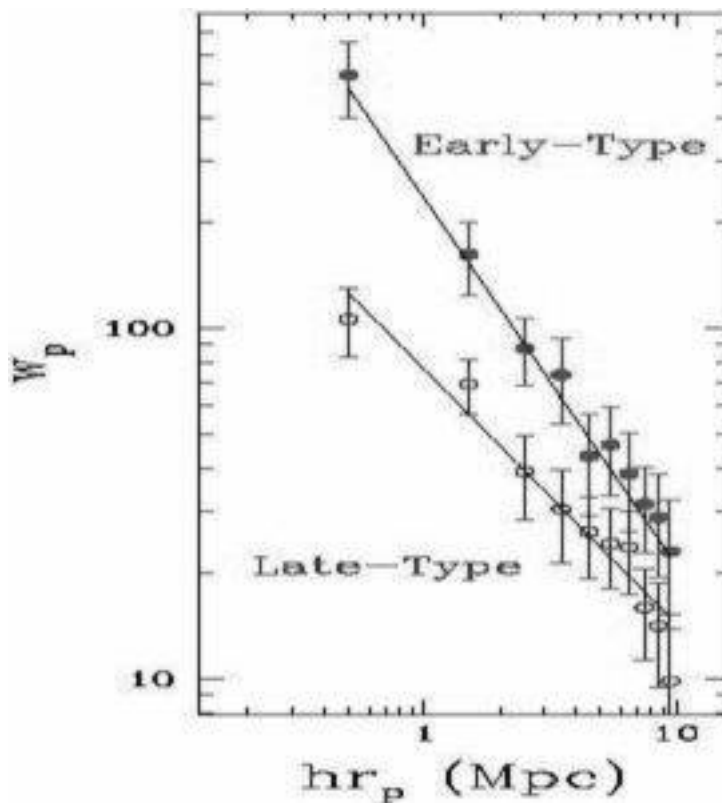


Figura 12.5: *Funzione di correlazione proiettata per galassie early e late.*

late clusterano più di quelle dei tipi early. Lo stesso discorso può essere fatto anche per le magnitudini o le luminosità: gli oggetti con luminosità più elevata sono più clusterati. Si riescono a fare grafici simili, con andamento a legge di potenza anche per ammassi di galassie o QSO.

Inoltre (e ovviamente) lo stesso discorso può essere fatto anche per lo spettro di potenza che mostrerà i diversi andamenti di cui abbiamo parlato con una variazione della posizione del picco in cui c'è la variazione dell'andamento Figura 12.6

Con l'osservazione degli ammassi di galassie noi possiamo andare a mappare la regione dello spettro di potenza vicina al picco, l'importanza del quale sta nel fatto che rappresenta la posizione dell'orizzonte al momento dell'equivalenza. A seconda dei modelli la posizione del picco si sposta, perché l'orizzonte all'equivalenza cambia se cambia la quantità di materia prevista dal modello (e cambia anche in funzione di h perché cambiano le scale). Si capisce quindi l'importanza di riuscire ad avere una buona statistica alle scale del picco. Riuscire a mappare la parte lineare ci darebbe un'ulteriore valanga di informazioni: avremmo innanzitutto il valore dell'indice spettrale (n), ma avremmo anche informazione sul tipo di DM coinvolta. Il problema però è che lo spettro viene deformato in primis dalla crescita non lineare, per calibrare questa crescita si devono usare le simulazioni N-body come abbiamo visto, quindi si riesce in qualche modo a tenere sotto controllo questo aspetto. Ma il vero problema è che lo spettro che noi osserviamo è quello dato dagli oggetti che vediamo, invece quello ottenuto dalla teoria è lo spettro della materia, quindi entra in gioco il bias osservativo: $P_g = b^2 P_m$.

Prendendo oggetti diversi osserviamo bias diversi, ma in generale all'interno del parametro b entra tutto il processo di formazione delle strutture cosmiche:

1. formazione degli aloni di materia oscura;

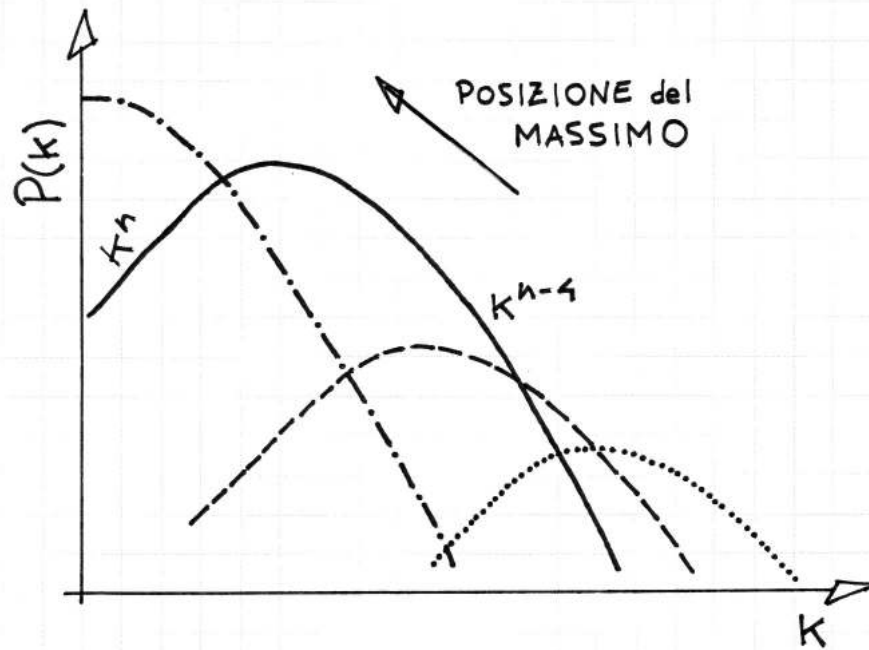


Figura 12.6: *Spettro di potenza, tra le diverse curve cambia il modello cosmologico.*

2. processi che portano al passaggio da aloni di DM a galassie formate (comportamento dei barioni quando cadono nelle buche di potenziale già formate).

Per quanto riguarda il primo punto, la teoria è in grado di fornire delle formule analitiche molto precise per trovare il valore del parametro di bias in funzione della massa degli oggetti coinvolti e del redshift a cui li osserviamo¹⁴:

$$b(M, z) := \sqrt{\frac{\xi_{halo}(r, z, M)}{\xi(r, z)}} = 1 + \frac{1}{\delta_c} \left(\frac{\delta_c^2}{\sigma_M^2 D_+^2(z)} - 1 \right)$$

dove abbiamo la dipendenza ancora dal delta critico, $\delta_c = 1.686$, inoltre dipende dalla varianza di massa σ_M e dal fattore di crescita $D_+(z) \propto (1+z)^{-1}$, in cui entra il modello cosmologico. Queste relazioni analitiche per il valore del bias possono essere calibrate utilizzando simulazioni numeriche (Figura 12.7).

Anche con questi andamenti ci dicono che il bias è maggiore all'aumentare della massa, questo perché gli oggetti di una data massa diventano sempre più rari mano a mano che andiamo indietro nel tempo. Allo stesso modo, fissando un redshift, aloni di materia oscura di massa maggiore hanno un bias più alto. Questo che abbiamo trovato è però il bias degli aloni di materia oscura, risponde cioè esclusivamente al punto (1) dell'elenco sopra, non tiene quindi conto di come la materia barionica interagisce con la materia barionica. Significa quindi che è necessario capire come sono legate le proprietà osservative degli oggetti (e.g. la radiazione emessa) con la loro massa reale. E questo non è facile. Quindi nel parametro b c'è una componente cosmologica che si riesce a tenere sotto controllo, e una componente di fisica di formazione delle galassie o degli ammassi che è invece molto complicata. Questo livello di complicazione è meno forte per gli ammassi di galassie che sono dominati dalla

¹⁴l'idea è quella della Press-Schechter: si assume una distribuzione gaussiana per i picchi di materia oscura...(poi non s'è capito)

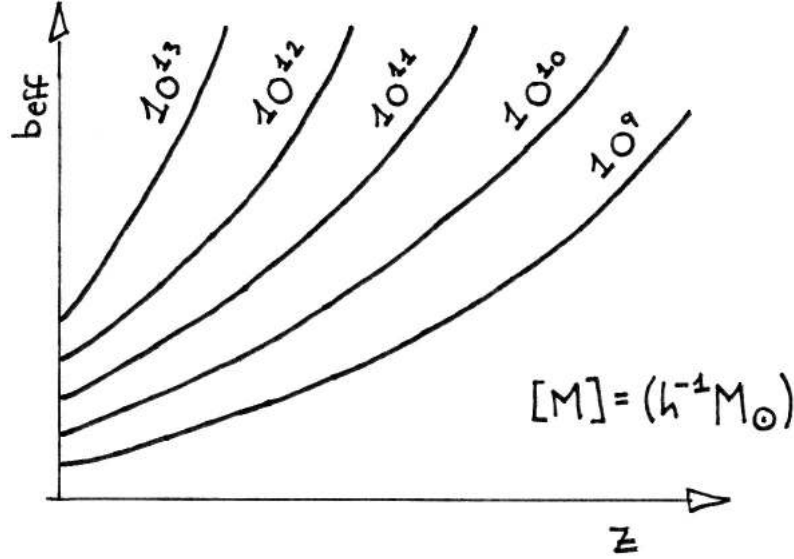


Figura 12.7: Valore del bias effettivo in funzione del redshift e della massa delle strutture.

componente di materia oscura, e il gas contenuto risponde in maniera quasi adiabatica. Per gli oggetti piccoli invece (quasar, galassie), ragioniamo in maniera opposta, fissiamo un modello cosmologico e assumiamo un bias osservativo, e passiamo poi a dedurre le proprietà degli aloni di materia oscura che li ospitano.

12.6 Effetti Dovuti Moto Proprio degli Oggetti

Abbiamo parlato della distribuzione su grande scala delle galassie ad alto redshift chiamando “rumore” il discostamento del campo di velocità degli oggetti dal flusso di Hubble che ci provocava una distorsione del redshift:

$$v = H(z)d + v_p$$

In realtà questo “rumore” contiene molta informazione cosmologica, e misurando il campo di velocità e di quanto questo si discosta da quello dato dal flusso di Hubble possiamo trarre informazioni sulla distribuzione della materia.

Supponiamo di avere un ammasso di galassie perfettamente sferico ad una distanza d , le galassie che lo compongono avranno una dispersione di velocità $\mathbf{v}$ che può essere scomposta nella componente radiale parallela alla linea di vista $\mathbf{v}_{\parallel}$ e in quella perpendicolare $\mathbf{v}_{\perp}$. Mentre della componente perpendicolare non ci accorgiamo, $\mathbf{v}_{\parallel}$ si somma vettorialmente alla velocità data dal flusso di Hubble. Questo fenomeno genera una distorsione degli oggetti lungo la linea di vista che appaiono quindi come filamentari, e ciò avviene sempre lungo la LdV, è il fenomeno dei **finger of god** (Figura 12.8), che avviene tutte le volte che assumiamo come misura della profondità spaziale il redshift¹⁵.

¹⁵“avviene nello spazio del redshift”: certi oggetti sembrano più lontani rispetto a quello che sono realmente.

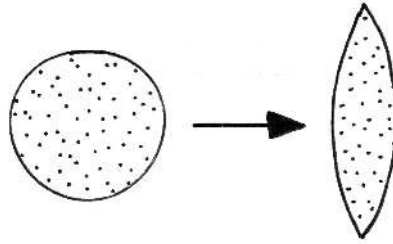


Figura 12.8: *Un ammasso di galassie intrinsecamente sferico ci appare allungato.*

Questo tipo di informazione non è facile da modellare poiché gli ammassi di galassie sono strutture estremamente non lineari¹⁶. Le scale tipiche in cui vengono osservati i finger of god sono quelle degli ammassi di galassie (qualche Mpc).

Su scale molto più grandi osserviamo invece un altro effetto dovuto al fatto che le galassie che si trovano attorno ad un ammasso ma non ne fanno parte tendono a cadere verso la sovradensità. Questo moto di caduta avviene nella realtà con simmetria sferica, ma se osserviamo nello spazio del redshift, risulta schiacciato perché la componente lungo la LdV del moto di caduta radiale si somma o si sottrae, a seconda della posizione dell'oggetto che sta cadendo rispetto al centro dell'ammasso e alla posizione dell'osservatore (Figura 12.9)

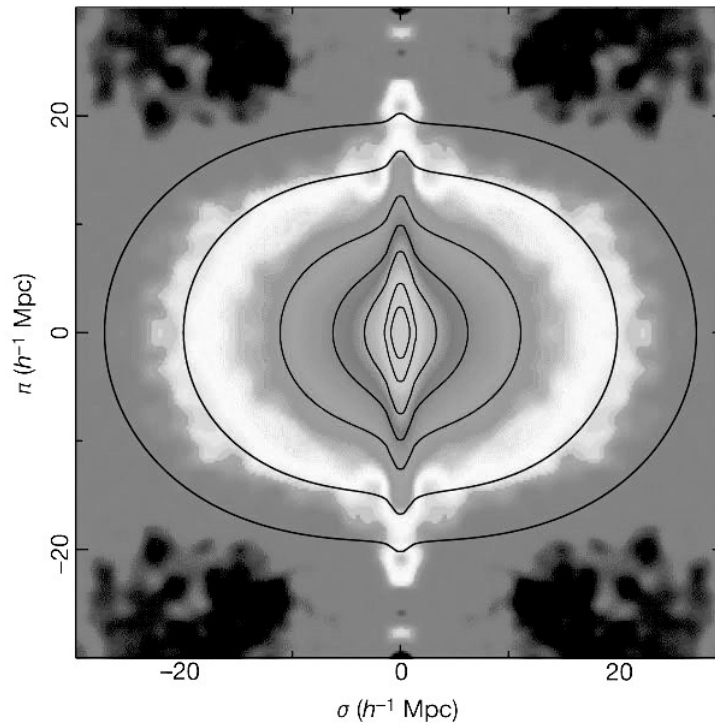


Figura 12.9: *Effetti di deformazione delle strutture dalla simmetria sferica nello spazio del redshift, dovuti ai moti propri degli oggetti che le compongono. Allungamento sulle piccole scale (dell'ordine di pochi Mpc) e schiacciamento sulle scale grandi (dell'ordine delle decine o più Mpc).*

¹⁶abbiamo già detto che è difficile anche solo per effetto delle forze mareali che un ammasso di galassie assuma simmetria sferica.

Per analizzare questo comportamento torniamo alla funzione di correlazione $\xi(r)$, che abbiamo fin'ora considerato funzione esclusivamente del modulo del vettore posizione $\mathbf{r}$, poiché al fine di studiare il clustering era sufficiente se si assumeva l'isotropia. Procediamo allora a scomporre il redshift nelle due componenti parallela ("π") e perpendicolare ("p") alla LdV:

$$|\mathbf{r}|^2 = r_\pi^2 + |\mathbf{r}_p|^2$$

ovviamente la componente parallela è unidimensionale, mentre la componente perpendicolare è bidimensionale. Fatto questo possiamo ricalcolarci la funzione di correlazione, ovvero calcoleremo quante coppie di oggetti hanno una data r_π ed una data $|\mathbf{r}_p|$. Avremmo che i punti che hanno la stessa funzione di correlazione, se il comportamento nello spazio del redshift fosse isotropo, sarebbero dei cerchi perfetti, ovvero il luogo dei punti con lo stesso valore della funzione di correlazione è un cerchio:

$$\xi(\mathbf{r}) = \left(\frac{|\mathbf{r}|}{r_0} \right)^{-\gamma} = \left(\frac{r_\pi^2 + |\mathbf{r}_p|^2}{r_0} \right)^{-\gamma} = cost$$

è l'equazione di un cerchio. Ma se invece includiamo i due effetti dovuti ai moti propri degli oggetti:

- su **piccola scala** il moto dovuto alla dispersione di velocità delle galassie all'interno dell'ammasso (è un moto non lineare, quindi molto difficile da modellare);
- su **grande scala** il collasso della materia dall'esterno all'interno dell'ammasso (è un moto lineare, quindi relativamente facile da modellare);

dalla variazione della deformazione a z diversi dell'ammasso osservato nello spazio del redshift, possiamo capire come stanno evolvendo le perturbazioni. In particolare esiste un legame lineare molto chiaro tra lo schiacciamento degli ammassi su grande scala e il fattore di crescita delle perturbazioni. La funzione di correlazione nello spazio del redshift¹⁷ si può scrivere in teoria lineare

$$\xi(s) = \xi(r) \left[1 + \frac{2}{3}f + \frac{1}{5}f^2 \right]$$

dove definiamo

$$f := \frac{a}{\dot{a}} \frac{\dot{\delta}_+}{\delta_+}$$

è in questa funzione, legata alla derivata del fattore di crescita, che è contenuta l'informazione cosmologica perché abbiamo visto che i parametri cosmologici influenzano la crescita delle perturbazioni. Quello che noi misuriamo è $\xi(s)$, calibrando f cerchiamo di riportare le forme degli oggetti da deformate a circolari, quando questo succede abbiamo trovato il valore di f corretto e quindi ne deduciamo l'informazione cosmologica.

Si potrebbe in particolare far vedere che la funzione f è funzione del parametro di densità della materia

$$f \propto \Omega_{0,m}^{0.56}$$

¹⁷Nello spazio del redshift la distanza calcolata con la legge di Hubble si indica con s .

in realtà ci sarebbero anche delle correzioni che dipendono da $\Omega_{0,\Lambda}$ ma non ce ne preoccupiamo perché il ruolo della costante cosmologica nella crescita delle perturbazioni è secondario. L'esponente è dovuto dall'aver assunto la relatività generale, come fondamentale dei modelli di Friedmann, quindi misurare l'accordo delle osservazioni con la pendenza 0.56 è un modo per testare la relatività generale. Questo perché abbiamo già detto che su grande scala la crescita delle perturbazioni dipende esclusivamente dalla gravità, e la descrizione della gravità che abbiamo assunto è quella della relatività generale, misurare una grande deviazione da 0.56 significherebbe che la relatività generale non funziona su scale cosmologiche. Con i dati attuali i valori si sono mostrati ampiamente compatibili con la relatività generale.

Altro punto importante da tenere in considerazione è il solito bias b , infatti quella che noi misuriamo in realtà non è una funzione di correlazione dipendente da f ma misuriamo un valore dipendente dal bias, in particolare la formula vera che misuriamo tiene conto del fatto che le galassie potrebbero non essere dei traccianti affidabili della materia:

$$\xi(s) = \xi(r) \left[1 + \frac{2}{3}\beta + \frac{1}{5}\beta^2 \right]$$

dove

$$\beta := \frac{f}{b}$$

ricordando che avevamo detto che $\delta_g = b \delta_M$.

Quello che stiamo implicitamente facendo con questa trattazione è una misura del campo di velocità. In teoria lineare avevamo scritto il sistema di equazioni dell'idrodinamica in funzione delle fluttuazioni nel campo di densità assumendo una soluzione nota detta di background (sistema (8.13) in Sezione 8.1.1), potremmo fare la stessa operazione considerando le fluttuazioni nel campo di velocità.

Abbiamo che la velocità comovente di un oggetto sarà data dalla

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} - H \mathbf{r}$$

dove $\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ è la velocità nel sistema di riferimento proprio, per passare a quello comovente dobbiamo cambiare variabile: $\mathbf{x} = \frac{\mathbf{r}}{a}$. Definiamo ora il **tempo conforme**

$$d\tau = \frac{dt}{a}$$

il tempo normalizzato per il fattore di scala. Al fine di formalizzare il campo di velocità ϕ_v , innanzitutto riscriviamo il sistema per il fluido perturbato (8.13) come

$$\begin{cases} \frac{\partial \delta}{\partial \tau} + \nabla(1 + \delta)\mathbf{v} = 0 & \text{continuità} \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \tau} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} + \frac{d}{d\tau} \frac{1}{a} \mathbf{a} + \frac{\nabla p}{\rho} + \nabla \phi = 0 & \text{Eulero} \\ \nabla^2 \phi = 4\pi G a^2 \delta & \text{Poisson} \end{cases} \quad (12.11)$$

Assumiamo di essere su una scala $k \ll k_J$ in modo da poter trascurare la pressione e assumiamo di avere l'adiabaticità per le fluttuazioni. In questo caso allora le soluzioni per il campo di densità sono quelle già trovate, avevamo visto infatti che il sistema ammetteva una soluzione crescente ed una decrescente, delle due ci interessa in cosmologia solo quella crescente. Con la soluzione crescente possiamo calcolare il valore di f dalla sua vera definizione che è

$$f := \frac{d \ln \delta_+}{d \ln a} = \frac{a}{\dot{a}} \frac{\dot{\delta}_+}{\delta_+}$$

andando a sostituire le soluzioni che troviamo per il sistema (12.11), si arriva all'andamento $\propto \Omega_{0,M}^{0.56}$ di cui abbiamo parlato. Avevamo trovato che, per il campo di velocità, le soluzioni sono irrotazionali quindi il campo di velocità può essere scritto come il gradiente di un **potenziale del campo di velocità**

$$v = -\frac{1}{a} \nabla \phi_v \quad (12.12)$$

e in maniera del tutto analoga scriviamo anche il campo di accelerazione gravitazionale come

$$g = -\frac{1}{a} \nabla \phi_g \quad (12.13)$$

Prendiamo ora l'equazione di Poisson come in teoria lineare e sostituiamo ricordando la definizione di densità critica:

$$\nabla^2 \phi_g = 4\pi G a \rho \delta = 4\pi G a \delta \left(\Omega_{0,M} \frac{3H^2}{8\pi G} \right)$$

$$\nabla^2 \phi_g = \frac{3}{2} \Omega_{0,M} a \delta H^2$$

rappresenta il legame tra il potenziale del campo gravitazionale e le fluttuazioni di densità. Linearizziamo ora l'equazione di continuità del sistema (12.11), ovvero trascuriamo i termini di secondo ordine (essendo anche $\mathbf{v}$ una fluttuazione il termine $\delta \mathbf{v}$ è di secondo ordine quindi lo trascuriamo):

$$\frac{\partial \delta}{\partial \tau} + \nabla v = 0 \quad (12.14)$$

La soluzione di δ l'abbiamo scritta come

$$\delta \propto \delta_i \delta_+$$

che, inserita nella (12.14), in virtù della relazione (12.12) ci da

$$\nabla^2 \phi_v = H f a^2 \delta$$

che rappresenta il legame che intercorre tra il potenziale del campo di velocità e il campo di densità. In particolare si vede che il potenziale del campo gravitazionale può essere scritto come funzione del potenziale del campo di velocità:

$$\phi_g = \frac{3}{2} \frac{\Omega_{0,M} H}{f} \phi_v$$

se facciamo il gradiente di questa relazione, in virtù delle (12.12), (12.13), otteniamo allora

$$v = \frac{2f}{3\Omega_{0,M} H} g \quad (12.15)$$

quindi il legame tra queste due quantità dipende fortemente da quanta materia c'è nell'Universo, sia attraverso $\Omega_{0,M}$ stessa che attraverso f , e quindi dipende dal modello cosmologico. L'equazione di Poisson può essere invertita e quindi possiamo sempre scrivere la velocità come funzione della densità:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \frac{aHf}{4\pi} \int \frac{\delta(\mathbf{x}')(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3\mathbf{x}' \quad (12.16)$$

(remember “funzione di green”?). L'informazione contenuta nell'equazione appena trovata può essere utilizzata in molte maniere all'atto pratico. Ad esempio ci piacerebbe misurare idealmente il campo di velocità degli oggetti nell'Universo, per poi invertire la (12.16) ed ottenere il campo di densità. Poiché delle galassie noi la velocità la calcoliamo misurando il redshift, calcolare il campo di velocità non è un'operazione banale poiché richiede di riuscire a distinguere nelle osservazioni la componente di velocità data dal flusso di Hubble dalla componente di moto proprio a cui siamo interessati. Per poter fare questa distinzione dobbiamo poter misurare la distanza degli oggetti in maniera indipendente dal redshift, e sappiamo che per le galassie lontane non esistono molti metodi per eseguire questa operazione (si usano delle relazioni di scala solitamente come la Tully-Fisher o la Faber-Jackson, oppure si approfitta quando possibile dell'esplosione di SN). Un altro problema nasce dal fatto che anche riuscendo a distinguere tra flusso di Hubble e velocità peculiare, il redshift misura solo la velocità lungo la linea di vista e quindi della velocità peculiare possiamo ottenere solo la componente radiale $v_{p,\parallel}$. Se riusciamo a venire a capo di questi problemi però, trovata quindi la componente radiale del campo di velocità riusciamo ad arrivare al campo di densità che lo ha generato.

Questo tipo di misure si fanno più o meno, si vedano ad esempio *Dekel et al. (Sept.93)* e *Yahill et al. (Sept.93)*.

Per concludere, grazie alle possibilità offerte dalla relazione (12.16), è possibile fare tutte le considerazioni statistiche fatte per il campo delle fluttuazioni di densità. In particolare potremmo anche definire uno spettro di potenza del campo di velocità, analogamente a quanto ottenuto per il campo di densità. Se per quest'ultimo, data una mappatura delle fluttuazioni δ , scriviamo

$$P(k) \propto \langle |\delta_k^2| \rangle$$

allora data una mappatura del campo di velocità $\mathbf{v}(\mathbf{x})$, potremmo scrivere

$$P_v(k) \propto \langle |\mathbf{v}_k|^2 \rangle$$

Ma per il legame (12.16) che intercorre tra δ e $\mathbf{v}$ abbiamo che

$$\delta(\mathbf{x}) = -\frac{\nabla \cdot \mathbf{v}}{aHf}$$

da cui quindi

$$P_v(k) \propto (aHf)P(k)k^{-2}$$

dove k^{-2} nasce dal fatto che passando allo spazio di Fourier un gradiente diventa semplicemente un k^{-1} . Analogamente, poiché

$$\delta_k^2 = \left(-\frac{ik\delta v_k}{aHf} \right)^2$$

allora

$$P(k) \propto \frac{k^2 P_v(k)}{(aHf)^2}$$

Il k^{-2} che compare in queste relazioni tra gli spettri di potenza ci dice che quello del campo di velocità è molto minore di quello delle fluttuazioni di densità. Quindi il campo di velocità devia dalla linearità molto di più del campo di densità.

Capitolo 13

Cosmic Microwave Background

La radiazione cosmica di fondo (CMB) è una radiazione isotropa di fotoni con $\lambda \approx 1mm$ e densità numerica $415cm^{-3}$. Viene interpretata come residuo del Big-Bang Caldo, tale radiazione è prodotta dai fotoni termalizzati, e quindi con spettro di corpo nero, con la materia prima del disaccoppiamento e provenienti dalla superficie di ultimo scattering ($z_{LS} \approx 1100$), momento in cui a causa della ricombinazione dell'idrogeno ($z_{rec} \approx 1500$), il libero cammino medio dei fotoni diventa infinito. La profondità ottica della CMB è data per definizione come da $\tau(z) = 1$. Poiché i modelli del Big-Bang caldo prevedono una radiazione fossile di questo tipo, la sua osservazione, avvenuta negli anni '70 ha decretato il successo di questi modelli sul modello concorrente dello stato stazionario. L'omogeneità e l'isotropia della CMB provano la veridicità del Principio Cosmologico, ma, allo stesso tempo, portano al problema dell'orizzonte: l'Universo risulta omogeneo su scale maggiori dell'orizzonte cosmologico. Abbiamo visto che questo problema si risolve introducendo una fase di espansione accelerata dell'Universo, detta inflazione.

Essendo prodotta in condizioni di equilibrio termico con la materia la radiazione di fondo ha uno spettro di corpo nero, corrispondente ad una temperatura odierna di

$$T_{CMB} = 2.726 \pm 0.010 K$$

tale temperatura doveva essere molto più alta in passato, poiché vale la

$$T = T_i \frac{a(t_i)}{a(t)} \propto T_i(1+z)$$

relazione derivante dalla conservazione dei fotoni e dall'effetto del redshift, permette di ripercorrere all'indietro la storia di raffreddamento dell'Universo. Dalla temperatura del corpo nero è possibile stabilire la densità numerica dei fotoni della CMB:

$$\rho_{CMB,0} = \frac{\sigma T_{CMB}^4}{c^2} \approx 4.8 \cdot 10^{-34} g/cm^3$$

dalla quale otteniamo $\Omega_{R,0} \approx 10^{-5}$ e $n_{\gamma,0} \approx 415 cm^{-3}$. Lo spettro di corpo nero della CMB come misurato dalla missione COBE è riportato in Figura 7.5 al termine del Capitolo 7.

13.1 Anisotropie nello Spettro della CMB

Nonostante lo spettro della CMB sia quasi un corpo nero perfetto esistono delle anisotropie, fluttuazioni nel campo di temperatura. Per capire da cosa possono essere generate tali

fluttuazioni bisogna innanzitutto chiedersi con cosa interagiscono i fotoni della CMB e con cosa possono aver interagito in passato.

1. **Gravità:** per uscire da una buca di potenziale un fotone deve spendere energia, questo porta ad un aumento della sua lunghezza d'onda cioè ad uno spostamento verso il rosso; viceversa quando un fotone parte da una cresta del potenziale subisce un blueshift. All'epoca dell'ultimo scattering (LS) le buche di potenziale possono essere generate solo dalla DM che, in virtù del suo antecedente disaccoppiamento dal fluido cosmologico, ha potuto far crescere le perturbazioni nel suo campo di densità. In termini di fluttuazioni abbiamo quindi che un fotone può subire un redshift o un blueshift, a seconda che parta da una regione sovradensa o sottodensa, rispettivamente.
2. **Densità:** poiché le fluttuazioni nel campo di densità che stiamo considerando hanno un regime adiabatico ne risulta che una maggiore densità in una regione porta ad un riscaldamento delle particelle, viceversa regioni sottodense sono più fredde. Essendo i fotoni che partono dalla superficie di LS precedentemente termalizzati con la materia, le fluttuazioni in densità portano alla presenza di fluttuazioni nel campo di temperatura, con un comportamento in competizione con quello dovuto alla gravità (spingono in direzioni opposte);
3. **Velocità:** la componente parallela alla LdV della velocità peculiare delle particelle presenti nella regione da cui parte il fotone osservato provocano un effetto doppler di natura diversa da quello gravitazionale visto sopra. Essendo il campo di velocità primordiale delle particelle completamente randomico non esiste un moto coerente e quindi si generano fluttuazioni positive se le particelle si avvicinano all'osservatore (blueshift) e negative se si allontanano (redshift).

Quelli elencati sono i tre effetti generali che causano anisotropie nel campo di temperatura della CMB al momento della sua emissione (LS), sono dovute tutte alle condizioni del fluido cosmologico (per quanto riguarda la (2) e la (3)) e della materia oscura (per quanto riguarda la (1)). Quelle generate da questi effetti sono dette **anisotropie primarie**.

Nel suo viaggio fino a noi però la CMB deve attraversare lo spazio che ci separa da $z = 1100$, questo significa che nel suo percorso può interagire con i mezzi che si interpongono lungo la LdV. Anche questo tipo di interazione provoca delle fluttuazioni nello spettro, che vengono però dette **anisotropie secondarie**. Al fine di studiare le condizioni dell'Universo primordiale siamo interessati esclusivamente al comportamento delle anisotropie primarie e tratteremo le altre come un rumore da eliminare dai dati. Vedremo comunque che anche le anisotropie secondarie possono contenere dell'informazione cosmologica di diversa natura come ad esempio l'effetto Sunyaev-Zel'dovich.

Poiché si suppone la superficie di LS sia una sfera di raggio $R_H(z_{LS})$ possiamo trascurare la dimensione radiale e descrivere il campo di temperatura della CMB¹ in termini angolari, $T(\theta, \phi)$. Quello che osserviamo sono delle **fluttuazioni in temperatura**:

$$\delta_T(\theta, \phi) := \frac{\delta T(\theta, \phi)}{T} = \frac{T(\theta, \phi) - \bar{T}}{\bar{T}}$$

con $\bar{T} = 2.726$. Si sceglie di effettuare una trattazione in termini di fluttuazioni in quanto consente un approccio statistico simile a quello affrontato per studiare $\delta = \delta\rho/\rho$. Quando abbiamo parlato delle fluttuazioni di densità, poiché formalmente effettuavamo uno

¹attualmente distribuito uniformemente su tutta la sfera celeste

studio su uno spazio 3-dimensionale, trasformavamo il campo di densità con Fourier, per scomporlo in onde piane. La CMB invece è distribuita su una superficie sferica, è quindi più conveniente scomporla in armoniche sferiche². Le armoniche sferiche consentono infatti di scomporre funzioni arbitrarie definite sulla superficie di una sfera. Le fluttuazioni di temperatura possono quindi essere scritte come **serie di Fourier-Legendre**:

$$\delta_T(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} a_{l,m} Y_{l,m}(\theta, \phi)$$

dove le $Y_{l,m}(\theta, \phi)$ sono le **armoniche sferiche**

$$Y_{l,m}(\theta, \phi) := \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{i\phi}$$

dove i $P_l^m(\cos \theta)$ sono i **polinomi di Legendre** calcolabili tramite le formule di Rodriguez, per quanto riguarda gli indici l ed m :

- **l** assume valori tra 0 e $+\infty$ è il valore di multipolo ed è legato all'inverso dell'angolo di separazione tra due punti:
 - $l = 0$: termine di monopolo;
 - $l = 1$: termine di dipolo, corrisponde ad un angolo di 180° ;
 - $l = 2$: termine di quadrupolo, corrisponde ad un angolo di 90° ;
 - $l \gg 3$: corrisponde ad angoli molto piccoli, $\theta \approx \frac{60}{l}$, per angoli molto piccoli i punti in esame possono essere considerati come giacenti su un piano e non più su una sfera.
- **m** varia tra $-l$ ed l e rappresenta la direzione in cui ci muoviamo.

Data una mappa in temperatura si calcolano i coefficienti a_{lm} ognuno corrispondente ad una coppia (θ, ϕ) . L'osservabile più importante della CMB è quindi il suo **spettro di potenza**, anche detto **spettro angolare delle fluttuazioni in temperatura**, si definisce come

$$C_l = C(l) := \langle a_{l,m}^2 \rangle = \frac{\sum_{m=-l}^{+l} a_{l,m}^2}{2l+1} \quad (13.1)$$

ovvero lo spettro in funzione di l , dato dalla media di tutti gli $a_{l,m}$ per un dato valore di l . È analogo allo spettro di potenza delle fluttuazioni in densità che, ricordiamo, è definito come $P(\mathbf{k}) \propto \langle |\delta k|^2 \rangle$ ed è dato da tutti i vettori $\mathbf{k}$ con modulo $k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2$. Analogamente appunto stiamo ricavando uno spettro che è funzione unicamente di l e lo otteniamo mediando su tutti gli m possibili per quel dato l . Come nel caso della densità, C_l non è una vera potenza ma piuttosto una **densità di potenza**.

²La nostra funzione sarà così rappresentata da una serie di Fourier-Legendre, anziché da una serie di Fourier, remember dinamica..?

13.2 Multipoli dello Spettro di Potenza Angolare

Quando $l = 0$ abbiamo il **termine di monopolio**, tiene conto di fluttuazioni su scale che comprendono tutto il cielo ed equivale al caso in cui prendevamo $P(0)$. Il termine di monopolio dello spettro angolare rappresenta il valore medio della fluttuazione, che è nullo per definizione come lo era il momento primo dello spettro di potenza. Si ha quindi che

$$C(0) = 0$$

da notare che il monopolio del campo di temperatura (quindi nello spazio reale anziché in quello di Fourier-Legendre nel quale stiamo lavorando) è il valor medio della temperatura, ovvero $T = 2.73 K$.

Il termine $l = 1$ è il **termine di dipolo**, considera fluttuazioni su scale $\theta = 180^\circ$, è il primo multipolo non nullo della serie ma a livello cosmologico è poco interessante. Il segnale prodotto dal moto della nostra galassia rispetto al sistema di riferimento in cui la CMB è fissa produce infatti un effetto dominante sul termine di dipolo proprio della CMB. Vediamo più nel dettaglio, il moto dell'osservatore rispetto al sistema di riferimento della CMB genera fluttuazioni poiché

- muovendoci catturiamo più fotoni nella direzione del moto e meno in quella opposta, rispetto al campo di radiazione nel sistema a riposo, la variazione è di un fattore

$$1 \pm \frac{v}{c} \cos \theta$$

- è presente un effetto di aberrazione, dovuto al boosting relativistico: l'angolo solido sotto il quale osserviamo è contratto di un fattore

$$\left(1 + \frac{v}{c} \cos \theta\right)^{-2}$$

il flusso che vediamo cresce nella direzione del moto con l'inverso di questa quantità.

La variazione netta dell'intensità ricevuta è quindi data da

$$I = I(\nu) \left(1 + \frac{v}{c} \cos \theta\right)^3$$

In termini di temperatura questa si traduce in

$$T = T_0 \left(1 + \frac{v}{c} \cos \theta\right)$$

Questa fu la prima anisotropia nella CMB a venire osservata (nel 1976), il suo valore corrisponde ad una fluttuazione di

$$\frac{\delta T}{T} \approx 1.3 \cdot 10^{-3}$$

molto elevato rispetto al segnale cosmologico intrinseco. Da questa fluttuazione si deduce che la nostra galassia si muove rispetto al sistema di riferimento della CMB con una velocità di $\sim 400 km/s$. Questa anisotropia, nonostante non abbia un significato cosmologico, è importante in astronomia perché consente di fissare un sistema di riferimento assoluto.

13.2.1 Multipoli di Ordine Superiore al Secondo

Analogamente a quanto avveniva per lo spettro di potenza, a valori piccoli di l corrispondono scale grandi, sicuramente maggiori dell'orizzonte, ma per valori grandi di l le scale corrispondenti diventano via via minori quindi si dovrà distinguere il caso in cui ci si trovi dentro o fuori dall'orizzonte.

$R > R_H(z_{LS})$: trattandosi di una scala fisica proiettata nel cielo, osservativamente noi vediamo $\theta > \theta_H$, corrispondenti a l piccoli. Alle anisotropie contribuiscono tutti e tre i meccanismi elencati in Sezione 13.1, ora però non ci cureremo del contributo della velocità che, in qualche modo, abbiamo già visto.

L'effetto della **gravità** è quello accennato di red-blueshift a seconda che i fotoni partano da regioni sovra-sottodense. Poiché $T \propto v^2 \propto \phi_g$ (sono tutte forme di energia), allora la perturbazione nel potenziale gravitazionale porta a fluttuazioni gravitazionali:

$$\frac{\delta T}{T} \propto \frac{T - \bar{T}}{\bar{T}} \propto \frac{\phi_g - \bar{\phi}_g}{\bar{\phi}_g}$$

$$\frac{\delta T}{T} \propto \frac{\delta \phi}{c^2} \quad (13.2)$$

quindi se $\delta \phi > 0$ allora il fotone parte da una cresta del potenziale e quindi acquista energia diventando più caldo: $\delta T/T > 0$ (viceversa il fotone si raffredda se parte da una buca di potenziale). Il denominatore c^2 è per far tornare i conti dimensionalmente.

Per quanto riguarda l'effetto delle fluttuazioni di **densità**, stiamo assumendo **perturbazioni adiabatiche**, perciò le regioni sovradense devono essere più calde e quelle sottodense meno calde, portando rispettivamente ad un blueshift e ad un redshift. Infatti

$$\rho := \rho_M \propto (1+z)^3$$

$$T_R \propto (1+z)$$

$$\Rightarrow T_R \propto \rho^{-1/3}$$

Se differenziamo questa relazione troviamo la

$$\delta = \frac{\delta \rho}{\rho} = 3 \frac{\delta T}{T} \quad (13.3)$$

ci dice che le fluttuazioni in temperatura sono all'incirca uguali alle fluttuazioni di densità, a meno di un fattore 3; questo significa che misurando le fluttuazioni di temperatura troviamo anche le fluttuazioni di densità.

Dall'equazione di Poisson potremmo trovare che

$$\delta = -2 \frac{\delta \phi_g}{c^2}$$

che, combinata con la (13.3), da

$$\delta = 3 \frac{\delta T}{T} = -2 \frac{\delta \phi_g}{c^2}$$

$$\frac{\delta T}{T} = -\frac{2}{3} \frac{\delta \phi}{c^2} \quad (13.4)$$

e dunque confrontando la (13.2) e la (13.4) è evidente che gravità e densità vanno in senso opposto e tendono quindi a compensarsi, poiché però i coefficienti non sono identici possiamo trovare:

$$\begin{aligned} \frac{\delta T}{T} &= \frac{\delta \phi}{c^2} - \frac{2}{3} \frac{\delta \phi}{c^2} \\ \frac{\delta T}{T} &= \frac{1}{3} \frac{\delta \phi}{c^2} \end{aligned} \quad (13.5)$$

questo è l'effetto combinato di entrambi i fenomeni ed è detto **effetto Sachs-Wolfe**. Questo è l'effetto dominante sulle scale grandi e quindi è ben visibile nello spettro angolare ad l piccoli. Sulla mappa termica della CMB distinguiamo tra macchie calde e macchie fredde che indicano regioni sottodense e sovradense, rispettivamente.

Nel termine a destra della (13.5) troviamo le fluttuazioni del potenziale gravitazionale e sappiamo come il campo di queste fluttuazioni sia legato allo spettro di potenza primordiale. Questo significa che misurando le fluttuazioni di temperatura su l piccoli abbiamo informazioni sullo spettro di potenza primordiale delle fluttuazioni in densità. Dalla teoria inflazionaria abbiamo poi visto che le fluttuazioni del potenziale dovrebbero corrispondere ad un rumore bianco, quindi ci attendiamo che sulle scale $l < l_H$, lo spettro delle fluttuazioni $\delta T/T$ sia sostanzialmente piatto: infatti, se assumiamo uno spettro primordiale di Zel'dovich $P(k) \propto k^n = k$ che tradotto in termini di **spettro del potenziale** diventa

$$P_\phi(k) \propto k^{n-1} = k^0 = \text{cost}$$

Quindi nello spettro di temperatura (come in quello di potenziale), ci attendiamo una specie di plateau a piccoli $l < l_H$ (Figura 13.1).

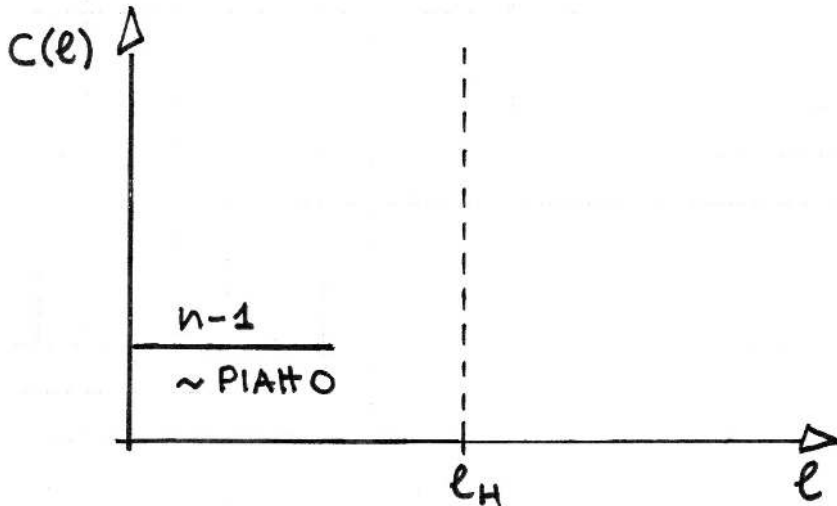


Figura 13.1: Plateau nello spettro angolare di temperatura per $l \ll l_H$.

Ovviamente però ci attendiamo anche un cambiamento di andamento quando ci avviciniamo alla scala dell'orizzonte...

$R < R_H(z_{LS})$: Su scale più piccole del raggio dell'orizzonte, come abbiamo più volte sottolineato, agiscono gli effetti della microfisica e si devono considerare le interazioni che avvengono nel fluido di barioni e fotoni accoppiati all'interno delle buche di potenziale generate dalla materia oscura (scattering Thomson). Il modello prevede che su scale dell'ordine o inferiori alla scala dell'orizzonte cosmologico nell'istante in cui fotoni e barioni si disaccoppiano (tempo della ricombinazione), le fluttuazioni di $\delta\phi$, $\mathbf{v}$ e δ possono oscillare, dando luogo a delle **oscillazioni acustiche** ad alte frequenze angolari ($l \gg 1$). Abbiamo una situazione come quella descritta in Figura 13.2(a): da una parte l'attrazione gravitazionale della DM (termine $\delta\phi$) tende a far cadere il fluido di barioni e fotoni nelle sue buche di potenziale, dall'altra la caduta del fluido nella buca genera una sovradensità, per cui la sua pressione di radiazione tende ad opporsi alla caduta, respingendo il fluido fuori dalla buca. Si generano perciò delle oscillazioni che avvengono su tutte le scale all'interno dell'orizzonte e viaggiano a velocità uguale a quella del suono, traducendosi in variazioni di densità con conseguenti variazioni di temperatura.

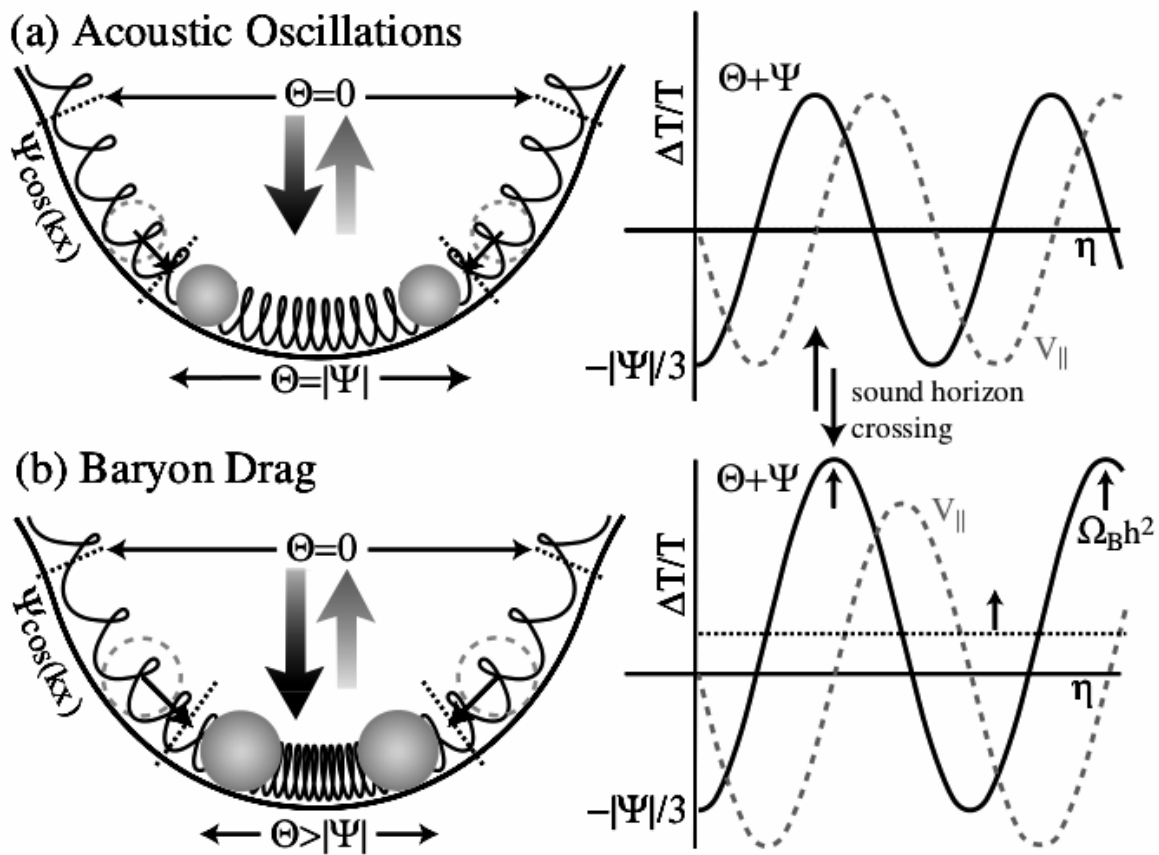


Figura 13.2: (a) Oscillazioni acustiche, ottenute considerando esclusivamente il contributo della DM al potenziale gravitazionale. (b) Baryon drag, aspetto reale delle oscillazioni acustiche, ottenuto tenendo in considerazione anche il contributo dei barioni al potenziale gravitazionale totale.

Poiché la velocità di oscillazione è quella del suono per tutte le scale, all'istante $z = z_{rec}$, le oscillazioni su scale sempre più piccole avranno compiuto un numero via via maggiore di oscillazioni. Il numero di oscillazioni fatte dipende dalla scala l , allora all'istante della ricombinazione, momento in cui l'Universo passa dall'essere opaco a perfettamente trasparente,

la posizione in cui troviamo le oscillazioni dipende dal numero d'onda l , e, poiché ogni scala oscilla in modo diverso, avremo tutte le situazioni possibili rappresentate. Si può descrivere questo processo qualitativamente come un oscillatore armonico. Consideriamo i due diversi meccanismi che provocano le oscillazioni:

- **Gravità e densità:** ci aspettiamo che i valori limite si abbiano quando il fluido di fotoni e barioni si trova nel punto più profondo della buca di potenziale, in questo caso il segnale dovuto alla gravità è il più alto possibile; viceversa, quando il fluido è più lontano dalla buca di potenziale allora abbiamo un minimo, ma insieme ai due casi limite avremo ovviamente tutte le situazioni intermedie. In termini di fluttuazioni di temperatura $\delta T/T$, quando una scala si trova nel punto più profondo della buca, abbiamo un picco nel segnale, quando invece si trova in una cresta il segnale ha un minimo. Il segnale che riceviamo è quindi una senoide come quella continua in Figura 13.2(a), dove i picchi successivi indicano perturbazioni che hanno fatto un numero intero di mezze oscillazioni.
- **Velocità:** il contributo della velocità si somma quadraticamente con le fluttuazioni di densità, ma il campo di velocità è sfasato di mezzo periodo ($\pi/2$), quindi gli istanti di minima e massima densità corrispondono a velocità nulle, mentre gli istanti di massima velocità corrispondono a densità uguali al valor medio, cioè a $\delta = 0$. Quindi il contributo a $\delta T/T$ dovuto alla velocità è sfasato rispetto a quello densità, ma l'ampiezza è la stessa (senoide tratteggiata in Figura 13.2(a)).

Quindi per ottenere l'andamento complessivo delle oscillazioni di temperatura dobbiamo sommare i due contributi, il primo andrà come $\sin \theta$ e il secondo come $\sin(\theta + \pi/2) = \cos \theta$, quindi

$$\left(\frac{\delta T}{T}\right)^2 = A^2(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = A^2 = \text{cost}$$

Ci aspettiamo quindi che il segnale non dipenda dall'angolo θ , e dunque sarà costante (Figura 13.3).

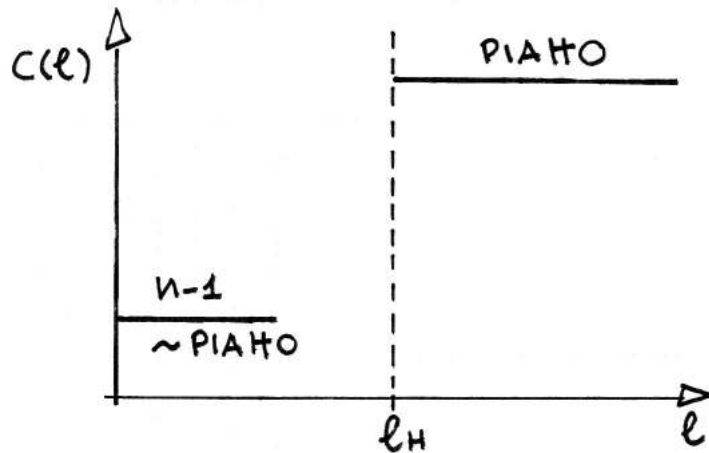


Figura 13.3: Comportamento previsto per lo spettro angolare delle fluttuazioni in temperatura prima e dopo l_H quando a contribuire alla gravità è solo la DM. Il segnale a $l > l_H$ è maggiore di quello a piccoli l trovato precedentemente. In ascissa l in ordinata la potenza vera $l(l+1)C_l$.

In questa trattazione abbiamo però trascurato il contributo alla gravità dei barioni: quando questi si addensano sul fondo delle buche di potenziale danno un contributo non trascurabile al campo di gravità, viceversa il contributo sulle creste è minore. Abbiamo allora la situazione riportata in Figura 13.2(b) con il fenomeno detto del **baryon drag**. Si crea uno sbilanciamento, di entità dipendente dal numero di barioni, tra i contributi di gravità (densità) e di velocità. Le scale che allo z_{rec} si trovano nella parte più profonda della buca di potenziale subiscono una compressione maggiore rispetto a quella vista in precedenza, in misura proporzionale al numero di barioni a disposizione. I due segnali sono ancora uguali ed hanno lo stesso sfasamento di $\pi/2$ ma l'ampiezza cambia e quindi sommando quadraticamente la risultante non è più costante ma oscilla:

$$\left(\frac{\delta T}{T}\right)^2 = A^2 \sin^2 \theta + B^2 \cos^2 \theta \neq \text{cost}$$

La situazione reale è quindi non è quella di quella di Figura ??, ma quella mostrata in Figura ??, dove si vede tra l'altro che i picchi non sono tutti uguali.

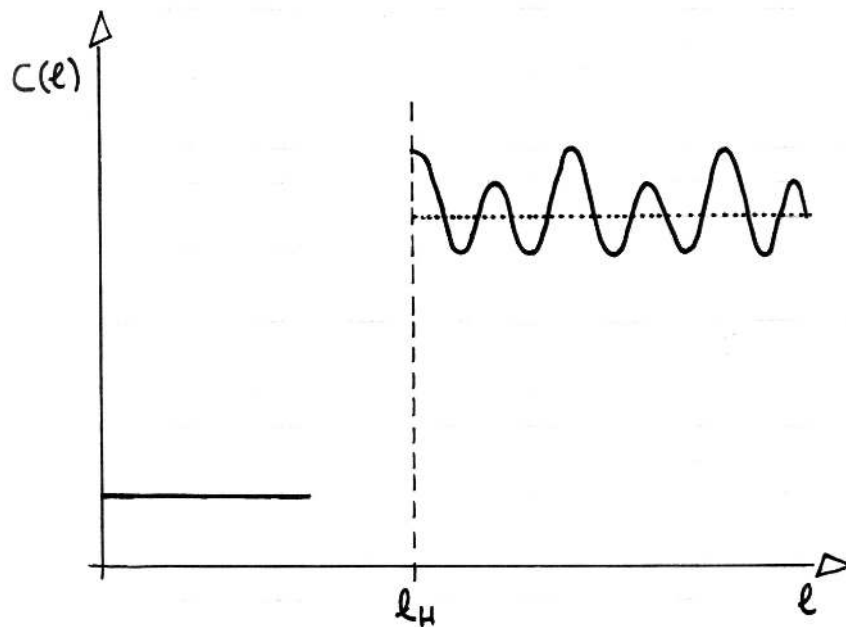


Figura 13.4: Comportamento previsto per lo spettro angolare delle fluttuazioni in temperatura prima e dopo l_H quando a contribuire alla gravità sono la DM e i barioni. Il segnale a $l > l_H$ è maggiore di quello a piccoli l trovato precedentemente in media e sono presenti oscillazioni con picchi dispari più alti di quelli pari, gli avvallamenti sono tutti allo stesso livello. In ascissa l in ordinata la potenza vera $l(l+1)C_l$.

La ragione per cui i picchi non sono tutti uguali è la somma effettuata in quadratura che positivizza anche i contributi negativi. In particolare abbiamo che i picchi pari corrispondono ai momenti di **massima rarefazione**, picchi dispari invece corrispondono ai momenti di **massima compressione**. La differenza tra i due picchi è dettata dalla disponibilità di barioni (dipende quindi dalla cosmologia). Maggiore è il numero di barioni più profonda diventa la buca di potenziale, quindi nel punto del massimo la compressione è maggiore rispetto alla rarefazione e i picchi dispari si alzano rispetto a quelli pari. Questo significa che misurare la differenza tra i due picchi ci dà una misura del numero di barioni nell'Universo.

Ci chiediamo allora a quali scale corrispondono questi picchi. Supponendo per semplicità che al momento della ricombinazione l'Universo passi istantaneamente da completamente opaco a completamente trasparente, osservando la CMB lo stiamo osservando in quel preciso istante. Poiché ad ogni scala l corrisponde un valore di C_l , allora i picchi maggiori corrispondono alle scale l che si trovano nei punti di massima compressione al momento in cui l'Universo diventa trasparente. Il primo picco corrisponde alla più grande scala dove c'è massima compressione, il secondo corrisponde alla più grande scala con massima rarefazione e via dicendo al crescere di l .

Bisogna ricordarsi però di un altro fenomeno che abbiamo studiato, ovvero la **dissipazione**: maggiore è l , più piccola è la scala nello spazio reale e quindi maggiore è l'effetto di dissipazione, l'effetto è legato alla **scala di Silk** che produce un taglio via via maggiore all'aumentare di l . Tale taglio va come l^{-4} , il contributo si somma al segnale oscillante visto ora, quindi avremo la somma dei due andamenti in Figura 13.5.

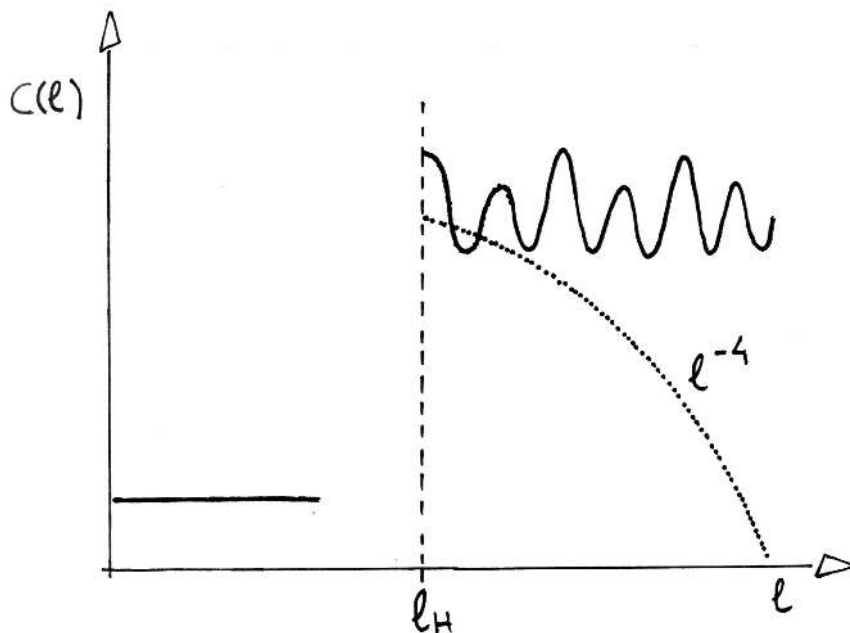


Figura 13.5: Rappresentazione schematica degli andamenti dello spettro angolare termico. In ascissa l in ordinata la potenza vera $l(l+1)C_l$.

Nella figura sono riportati tutti gli andamenti che ci attendiamo dall'analisi che abbiamo effettuato ora. Una versione completa con tutte le regioni collegate e i contributi sommati è quella di Figura 13.6. Distinguiamo 3 regioni:

- l piccoli e $R > R_H$: plateau che conserva l'informazione dello spettro del potenziale gravitazionale primordiale;
- l piccoli e $R < R_H$: oscillazioni acustiche, con picchi dispari più alti di quelli pari, via via decrescenti al crescere di l ;
- l grandi e $R \ll R_H$: la diffusione cancella le oscillazioni e quindi $l(l+1)C_l$ va velocemente a zero.

Dalla Figura 13.6 si vede inoltre che al variare del modello cosmologico varia l'aspetto dello spettro atteso. Misurando quindi quello reale sulla CMB possiamo ottenere stime dei parametri cosmologici.

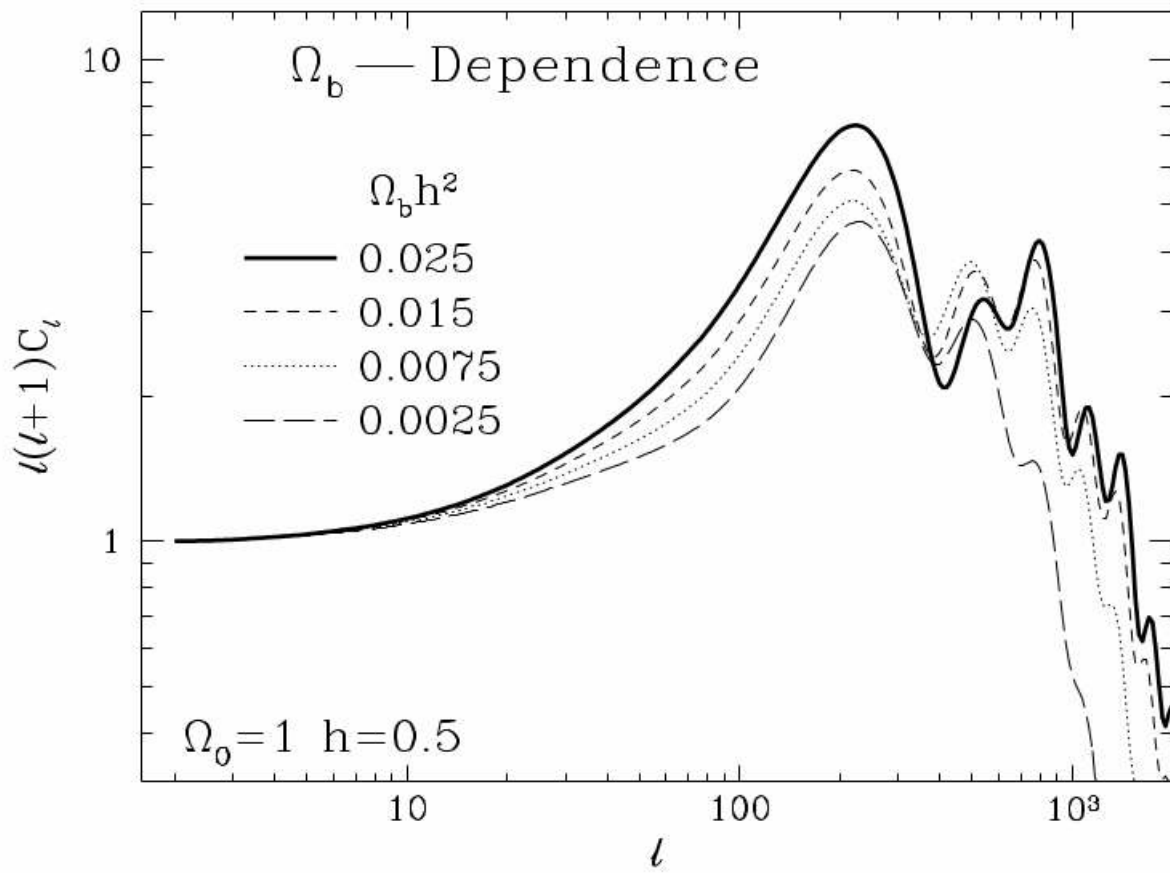


Figura 13.6: Spettro angolare della temperatura completo in funzione della scala ℓ e al variare del modello cosmologico.

Studiando lo spettro angolare sulle scale molto grandi (l piccoli), cioè dove non incorriamo negli effetti della microfisica, possiamo cercare informazioni su normalizzazione ed indice spettrale dello spettro di potenza primordiale

$$P(k) = Ak^n$$

poichè abbiamo infatti visto che l'indice n è in relazione $n - 1$ con lo spettro angolare, la normalizzazione A è invece data dall'altezza dello spettro. Per fare questa analisi siamo però limitati dal punto di vista statistico, infatti i valori di C_l si ottengono mediando $2l + 1$ valori di $a_{l,m}$, questo significa che più è piccolo l meno termini abbiamo da mediare, con un segnale risultante peggiore (vedi equazione (13.1)). Trasponendo questo discorso nello spazio reale, è equivalente a dire che di fluttuazione su grande scala ne abbiamo poche e quindi la statistica nei dati è peggiore. È anche vero comunque che avendo a che fare con grandi aree di cielo non abbiamo bisogno di satelliti sofisticatissimi poiché ci bastano basse risoluzioni (e anche sensibilità minori, tanto integriamo regioni più grandi quindi il rapporto S-N cresce). Il satellite COBE nel 1992 misurò le anisotropie su scale angolari $> 7^\circ$, corrispondenti a $l \leq 10$, confrontare con Figura 13.6. Questo problema statistico è il **problema della varianza cosmica**: non sappiamo se il risultato che otteniamo è sufficientemente rappresentativo del valore vero.

Un'altra importante informazione cosmologica contenuta nello spettro della CMB è data dalla posizione del primo picco, questa corrisponde infatti alla scala immediatamente inferiore di quella dell'orizzonte cosmologico al tempo dell'ultimo scattering. Convertendo la scala l nella corrispondente distanza angolare abbiamo l'angolo sotto cui viene visto l'orizzonte cosmologico all'ultimo scattering. Poiché $z_{LS} \sim 1100$, possiamo usare EdS per calcolare il raggio che dovrebbe avere l'orizzonte nei differenti modelli e quindi capire qual'è il modello corretto. Il raggio $R_{H,LS}$ è un **righe llo standard** e l'angolo sotto cui lo vediamo dipende dalla geometria dell'Universo, ovvero da Ω_{tot} .

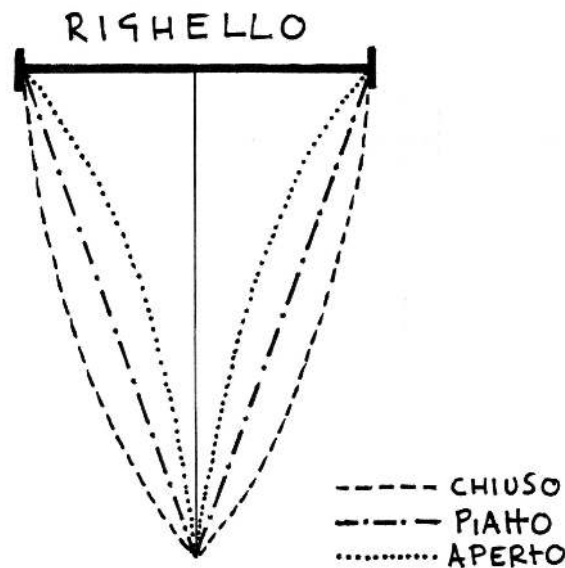


Figura 13.7: Dipendenza dalla geometria dell'angolo sotto cui osserviamo l'orizzonte all'ultimo scattering.

Come mostrato in Figura 13.7 possiamo avere 3 casi, a seconda dell'angolo cartesiano sotto cui osserviamo l'orizzonte (i triangoli hanno nello spazio piatto somma degli angoli interni di 180°):

- $\theta_{obs} < \theta_{cart} \Rightarrow l_{obs} > l_{cart} \Rightarrow$ Universo Aperto;
- $\theta_{obs} = \theta_{cart} \Rightarrow l_{obs} = l_{cart} \Rightarrow$ Universo Piatto;
- $\theta_{obs} > \theta_{cart} \Rightarrow l_{obs} < l_{cart} \Rightarrow$ Universo Chiuso.

La scala l per un Universo piatto è di circa $l \approx 220$ e corrisponde a circa un grado di cielo.

Altre importanti informazioni che possiamo ottenere dallo spettro della CMB riguardano la **percentuale di barioni** di cui è composto l'Universo, per l'influenza che la loro presenza ha sulla differenza tra picchi dispari e pari. Maggiore è la differenza tra l'altezza di picchi pari e dispari maggiore sarà il contenuto di barioni nell'Universo, questo metodo è molto più affidabile rispetto a quello che sfruttava la nucleosintesi primordiale visto precedentemente (Sezione 7.3.3).

La misura delle scale fisiche nell'Universo dipende dalla costante cosmologica, poiché infatti possiamo sempre scrivere il raggio dell'orizzonte cosmologico come

$$R_H = a(t) \int \frac{c dt'}{a(t')} = c a(t) \int \frac{da'}{\dot{a}' a'}$$

e dato che $a(t)$ può essere sempre scritto in funzione di H_0 , possiamo avere una stima della **costante di Hubble**, in particolare variandone il valore varia la posizione dei picchi.

Concludiamo questa sezione facendo notare che in linea di principio a questi redshift non abbiamo nessun effetto da parte della **costante cosmologica**, quindi apparentemente non dovrebbe influenzare C_l .

13.3 Anisotropie Secondarie

Questo tipo di fluttuazioni nel campo di temperatura della CMB, come abbiamo detto, si generano mentre i fotoni viaggiano da z_{LS} fino a noi. Dopo la ricombinazione i fotoni non interagiscono più con la materia per mezzo della diffusione Thomson ma possono comunque andare incontro ad altri tipi di interazione.

13.3.1 Effetto Sachs-Wolfe Integrato

I fotoni della CMB nel loro viaggio fino a noi possono subire gli effetti gravitazionali degli oggetti che incontrano, questo provoca una variazione nel tempo del contributo del potenziale gravitazionale alle fluttuazioni, tale effetto va sotto il nome di **integrated Sachs-Wolf (ISW)**:

$$\frac{\delta T}{T} = \int \delta \dot{\phi}[r(t), T] dt$$

La rilevanza sullo spettro risultante di questi effetti varia:

- **Potenziale Statico:** durante il loro percorso i fotoni possono incontrare dei potenziali statici con $\delta \dot{\phi} = 0$, l'effetto netto è nullo poiché l'energia acquisita entrando nelle relative buche di potenziale viene perso all'uscita;

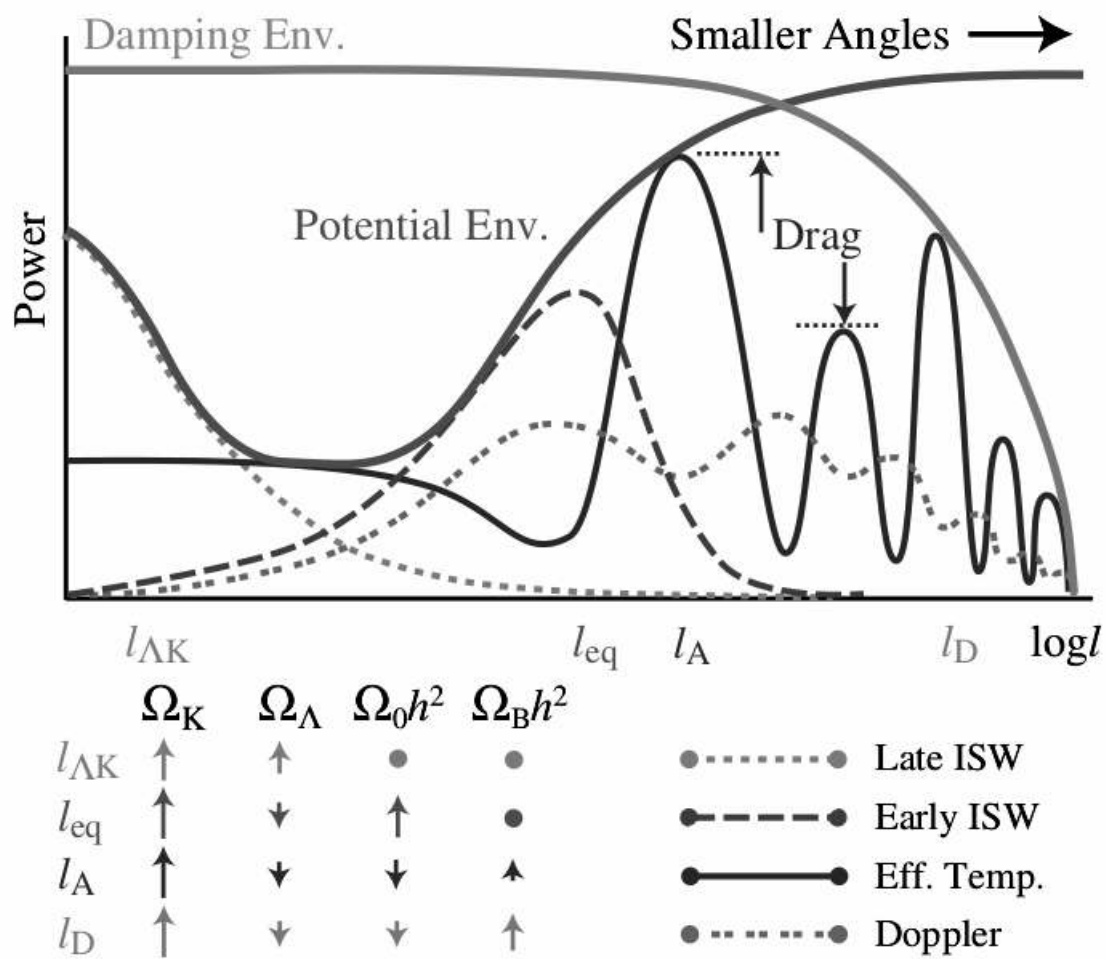


Figura 13.8: *Spettro totale delle anisotropie della CMB.*

- **Effetto Rees-Sciama:** quando il fotone incontra delle strutture con un forte tasso di crescita, il campo gravitazionale da esse generato varia rapidamente nel tempo in modo non lineare, l'effetto risultante non è nullo e l'energia guadagnata dal fotone entrando nella buca di potenziale è minore di quella persa all'uscita, portando ad un effetto complessivo di spostamento verso il rosso; può avvenire anche l'effetto opposto, passando in una regione che sta perdendo rapidamente massa il fotone viene blueshiftato. L'effetto comunque è molto più piccolo delle anisotropie primarie.
- **Late ISW:** abbiamo visto che in un Universo EdS le fluttuazioni crescono in regime lineare come $\delta \propto a \propto t^{2/3}$, inoltre seguendo l'adiabatica della materia abbiamo che $\delta_B \propto a^{-3} \propto t^{-2}$, applicando l'equazione di Poisson otteniamo

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G a^2 \rho_B \delta \propto t^{4/3} t^{-2} t^{2/3} \propto \text{cost}$$

questo è però valido fintanto che siamo in regime lineare, con $\delta\phi \ll 1$ in un Universo EdS. Questo non è quindi vero per universi curvi in cui la crescita in regime lineare non rimane costante, si generano quindi anisotropie dovute alla variazione del potenziale gravitazionale anche in regime lineare. Nello spettro di potenza angolare questa crescita lineare avviene su scale molto grandi, e quindi a l piccoli e genera il bump sulla regione a sinistra del grafico in Figura 13.8. Questo effetto è presente in universi che non sono EdS, cioè quando la geometria è curva o quando c'è un contributo di costante cosmologica.

- **Early ISW:** subito dopo la ricombinazione l'Universo non è ancora completamente dominato dalla materia, quindi la radiazione contribuisce al potenziale delle fluttuazioni di DM, ovvero abbiamo che $\delta\phi = \delta\phi_{DM} + \delta\phi_B + \delta\phi_R$. La diffusione dei fotoni non più accoppiati dallo scattering Thomson, prova un decadimento netto di $\delta\phi$, per cui $\delta\dot{\phi} < 0$ che a sua volta provoca $\delta T/T$. Poiché questo fenomeno interessa scale dell'ordine della scala dell'orizzonte alla ricombinazione, l'effetto è un picco su scale l simili a quelle del primo picco acustico.

13.3.2 Effetto del Lensing Gravitazionale

La presenza di strutture molto massicce sul cammino ottico dei fotoni della CMB, provoca una deflessione dei fotoni, la cui entità dipende da quanto sono evolute le strutture (rappresenta quindi anche un modo per tracciare la crescita delle fluttuazioni). Provoca un'effetto sulla topologia della mappa ma non cambia i valori della temperatura: il fotone deflesso arriva da una regione diversa da quella originaria ma ha la stessa lunghezza d'onda.

13.3.3 Re-ionizzazione dell'Universo

Poiché l'Universo ad alto redshift è neutro ma a $z \sim 5$ è completamente ionizzato, questo significa che ha subito una re-ionizzazione globale (le stelle di PopIII generano degli intensi campi di radiazione tale da re-ionizzare l'Universo, vedi effetto Gunn-Peterson). Un fotone della CMB a $z \sim 5$ dovrebbe avere ancora un'energia molto elevata, quindi attraversando regioni completamente ionizzate può subire degli scattering con i barioni, venendo deflesso dalla sua direzione originale. Questo fenomeno non può avvenire su scale maggiori dell'orizzonte cosmologico e dunque è osservabile su scale angolari pari a quella dell'orizzonte

cosmologico al momento in cui il fotone subisce lo scattering. D'altra parte il raggio dell'orizzonte cresce nel tempo e quindi le scale su cui avviene la diffusione saranno via via maggiori al diminuire del redshift, ma è anche vero che con il passare del tempo la densità barionica media e quella del campo di radiazione decrescono, quindi la probabilità di avere scattering inverso sarà sempre minore.

L'effetto della re-ionizzazione globale è quello di modificare lo spettro di potenza angolare al più per $l > 10$, le altre scale rimangono praticamente invariate.

13.3.4 Effetto Sunyaev-Zel'dovich

Gli ammassi di galassie sono permeati da plasma molto caldo (fino a $10^7 K$), quando i fotoni della CMB li attraversano subiscono Inverse-Compton e quindi acquistano energia, questo provoca una **distorsione dello spettro termico**: se lo osserviamo alle basse frequenze (microonde) c'è un abbassamento in temperatura, mentre nelle alte frequenze c'è un corrispondente innalzamento.

L'effetto netto sullo spettro di potenza angolare non dovrebbe essere molto forte, ma questo fenomeno è uno strumento formidabile per l'individuazione di ammassi di galassie nell'Universo.

13.4 Osservazione nella Pratica

Osservare la CMB non è semplice: un ricevitore non è infatti in grado di distinguere tra i diversi fotoni e quando otteniamo una mappa non stiamo osservando solo la CMB, ma anche la somma di tutti i contributi provenienti da segnali spuri provenienti da altre sorgenti (compresa tutta la spazzatura proveniente da terra, ragion per cui si preferisce mandare satelliti in orbita piuttosto che costruirli a terra). Quindi le immagini non ridotte (Figura 13.9) sono molto diverse da quelle belle tutte colorate che ci fanno vedere in tivù.

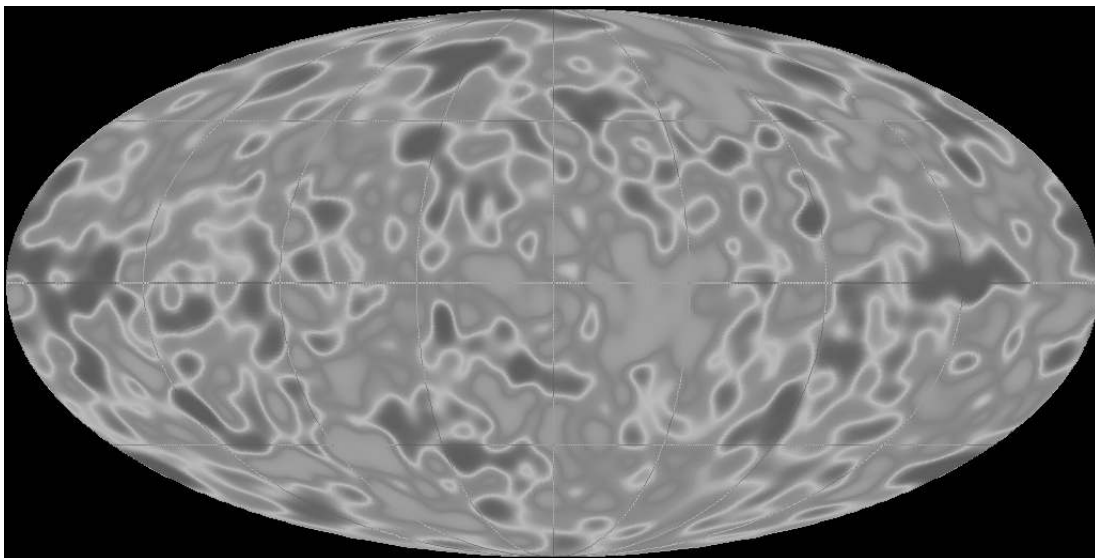


Figura 13.9: *CMB non ridotta.*

In primis la maggior parte del segnale ci arriva dal piano galattico, è dunque necessario sottrarre innanzitutto questa componente dai dati per ottenere il segnale cosmologico a cui siamo interessati. La ripulitura viene fatta osservando diverse lunghezze d'onda, così da

riuscire a separare il segnale termico da altri segnali non termici come il sincrotrone, prodotti da altre sorgenti.

In Figura 13.10 è mostrato lo spettro di potenza migliore misurato prima di Planck: a l molto piccoli sono presenti grandi barre di errore dovute non alle misure, che sono piuttosto precise, ma a incertezze statistiche (varianza cosmica).

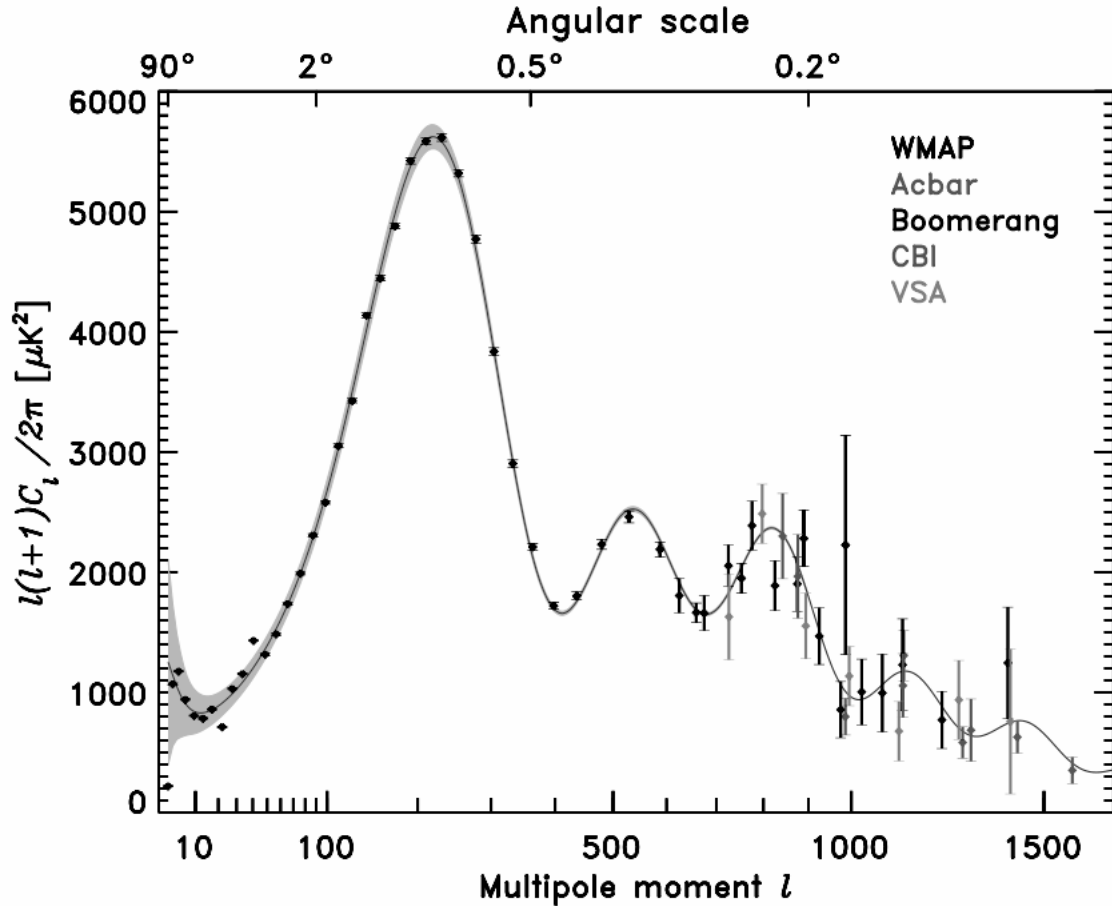


Figura 13.10: *Spettro angolare prima di Planck.*

Quello che possiamo fare con questo spettro ad esempio è

- misurare agli l piccoli il livello di A , normalizzazione dello spettro di potenza $P(k)$;
- misurare sempre agli l piccoli la pendenza n dello spettro di Zel'dovich;
- l'esatta posizione del picco, con la quale otteniamo ottime stime di Ω_{tot} ;
- misurare la differenza in altezza tra il primo e il secondo picco per ottenere un'ottima stima di Ω_B .

Il satellite Planck ha tantissimi canali di frequenza, offre quindi la possibilità di separare molto bene tutte le varie componenti dovute al rumore, dopo una laboriosa riduzione dati si può quindi arrivare ad una mappa finale molto pulita. Il principale pregio di Planck è però la risoluzione angolare che ci ha permesso di misurare lo spettro a l altissimi, ovvero su scale angolari molto molto piccole.

La mappa che ci offre Planck è una mappa di temperatura che può essere convertita in mappa in densità poiché le regioni più calde sono quelle sottodense e viceversa. Ogni posizione nella mappa è caratterizzata da due angoli, ottenendo quindi le armoniche sferiche si arriva quindi ai coefficienti $a_{l,m}$ dai quali è possibile costruire lo spettro di potenza angolare sul quale poi possiamo fare tutta la cosmologia che vogliamo. Le fluttuazioni medie sono dell'ordine di 10^{-5} .